3．新しい学力観に基づく中学校数学の授業改革に向けて

根　本　　　博

はじめに

現在、中学校では、新しい学習指導要領が目指す学力観（新しい学力観）に基づき、それぞれの生徒の達成状況を的確に把握し、彼らが数学学習に必要感をもち、数学理解を深められるようにする注意深い観察と分析結果を踏まえた授業展開が求められている。

当然、評価についても、これまでとかく陥りがちであった結果主義、あるいは、一面的かつ単一的測定の傾向にある評価観から脱却し、生徒の個性や多様な能力に目を向けて、「予想される未来社会に柔軟かつ主体的に対応し得る人間の教育」（「中央教育審議会　教育内容等小委員会　昭和58年11月審議会報告」）を目指す必要がある。

他の教科に増して学習成果の‘段階付け’に役立っていると指摘される数学教育で、生徒一人一人の個性を尊重し、彼らの理解過程を見つめ、将来を見越した評価をどのように実現するか、これを授業レベルで考えるのが本稿のねらいである。

1．中学校数学教育推進の基盤

中学校で、「（数学の学習は）嫌いだけど（試験でよい点を採るために）覚えておくしかない」という生徒が潜在的に増えているように思える。こうした状況は、数学科の授業設計や学習指導の方法に大いに関係する。「先生は自分（教師自身）のことを基準にして話しをしている（説明している）。」という生徒の声は、＜学ぶからにはよく理解したい＞という気持ちと、一方で＜なぜ学習するのかよく分からない＞という気持ちの現れであり、数学学習に対する必要感が損なわれていることを暗示するものではないだろうか。

＜数学は形式的に教えられる教科で、その学習は教えられた通りの決まったやり方を適用して答を見つけることだ、つまり、こと数学について人は教えられたことを教えられた通りに機械的にやる、それこそ数学の知識を獲得する唯一の仕方である＞というような数学学習に対する歪曲した捉えを生徒に植付けることは避けなければならない。

中学校における現行『学習指導要領』（平成元年３月公示）は、昭和62年12月の教育課程審議会答申にある「教育課程の基準の改善のねらい」の趣旨を踏まえ、主として社会の変化とそれに伴う生徒の生活や意識の変容に配慮して作成された。

ここに詳しく述べないが、同審議会の答申には、教育課程の基準の改善について、心豊かな人間の育成、自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる能力の育成、基礎・基本の重視と個性を生かす教育の充実など、基本的なねらい４項目が示されている。さらに、算数・数学科としての改善の基本方針には、

○情報化などの社会の変化に対応し、論理的な思考力や直感力の育成を重視する観点から、様々な事象を考察する際に、見通しをもち、筋道を立てて考え、数理的に処理する能力と

態度の育成を一層充実する

○数理的な考察処理の簡素さ、明瞭さ、的確さなどのよさが分かるようにし、数学を意欲的に学習しようとする態度を育てる

といったことが示されている。

また、中学校『学習指導要領』第一章総則の「第一　教育課程編成の一般方針」の1には、

学校の教育活動を進めるに当たっては、自ら学ぶ意欲と社会の変化に主体的に対応できる能力の育成を図るとともに、基礎的・基本的な内容の指導を徹底し、個性を生かす教育の充実に努めなければならない。

と述べられ、各学校においてまた各教科教育の中でこれを達成することが要請されている。各学校段階相互の関連を図ることなどと併せて、これらの実現を目指し中学校における数学科の目標が設定されたことは周知の通りである。

[中学校数学科の目標]

数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。

指導内容に大きな変動はみられないが、それだけに数学科における目標のインプリシットを充分に理解して指導実践に望む必要がある。

2．数学科における授業改革の視点

数学の問題はとにかく早く計算をして答を出すことが大事という印象を与えていないだろうか。例えば、「～を証明しなさい。」というのと同じ意図で「～の理由を書いて下さい。」という問いかけたとき、明らかに後者の反応率が低いというデータがある。理由を書き易くしようという配慮が、形式的に証明すること以上に生徒に困難を来たしてしまうのである。図形の証明に関する問題でこのような状況であるから、その傾向は、数量に関する学習でも推して知るところである。

すなわち、これまで数学学習はルーティンワークであるという方向に進んできたように思える。こうした偏った考え方は払拭しなければならないが、基本的には学習活動を通して、生徒が、自分はどんなことを考えたのか、どんなことが分かったのか、自分にとってどんな意味を持つのか考える機会を設ける必要があると思われる。そのために、まず、数学教育でもう少し配慮したいと思われる点を二、三指摘しておきたい。

1)現実の事象を数学で捉えようとする意識を育てること

与えられた課題に対して、とにかく早く結果を得ようと取り掛かるのと、具体的な状況を想起し、＜数学で考える＞ことができるだろうかというところから考え始めるのとでは隔たりが

ある。

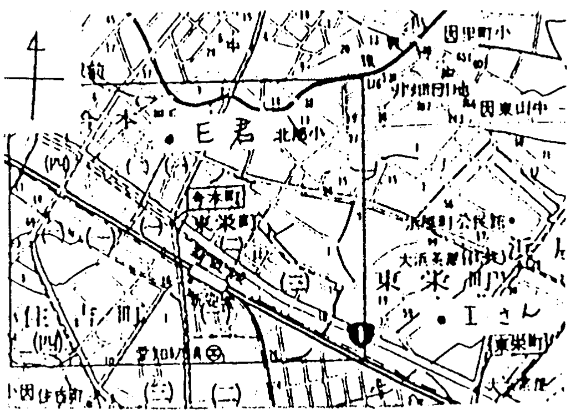
前者の場合、結果が得られてもそれは（先生が判定する）○×の対象で、生徒にとっては、自分との関わりがきわめて希薄になる。「考える」ことの楽しさなど到底味わえない。自己の学習経験がどのような意味を持つかは傍らに措かれ、教師のこと（表情）や○をもらうことが、数学を学習することより気になるようになる。自分なりに数学で処理できるように翻訳するという問題理解より、先生が用意した答が優先する。生徒は自ら「考える」必然性を無視してしまっていることすら気付かない。従って、教師の意に反して、生徒は‘やらされている’という意識をますます強めてしまうことになる。

さて、「数学を使って…」というのは、数学の世界で処理できるように文字記号や図形に置き換えたり（翻訳したり）する、いわゆる事象を数理的に捉える数理化、あるいは数学化という数学的な見方や考え方とも深く関わっている。いつでも紙とエンピツを使って方程式を立てて処理しなければ数学を使っていることにはならないというのではない。それは、問題の意味を理解したり、これまでの常識（ common sense ）を基に解決の手立てを探したり、仮説を設定したり、実証するために実験をしたり、与えられた（収集した）数値（データ）を加工して操作を加えたり作図をしたり、理想化して考えたり、ときには実際に体を動かして考えたりするなどの行為の中に自然に誘発される。とりわけ、特徴的なのは、そうした中に方法や結果を予測し見通しを立てるという行為が現れることである。すると、手掛かりを得て解決を進めて予想した答に到達しなかったときでも、自己の行為に対するチェック機能が働き、たとえ失敗に終わったとしても、苦労したその過程（経験）を生かそうとする姿勢も生まれよう。この点が重要である。数学で考えることのよさに気付き、長期的に見れば、数学を学びとること、さらに、なぜ数学を学習するのかの理解にも繋るからである。

3．でも述べるが、問題解決活動の中で「数学的に考える」ということは、特別なことではない。解決の手掛かりを求めようとする思想の中に自然に発生する人間の心の動きである、そのように考えたいのである。 R. Descartes （1596-1650）ほどに強調するつもりはないが、問題を合理的に解決する方法として先ず「数学の問題として考えられないか」ということを、たとえ数学の教科書に書いてある問題でも、学習に際してはいつも生徒が意識して取り組めるよう配慮したいものである。

次のような具体的な問題（これでもかなり数学的に整理されてはいるが）を例にして述べてみたい。

T先生の家は、国道までの距離が2㎞で、国道の北側にあります。また、T先生の家は、IさんとE君の家まで同じ距離にあるといいます。T先生の家を右の地図上に見つけなさい。



ＩさんとＥ君が先生の家へ遊びに出かけようと地図を見ている様子を想起できる。Ｔ先生の家が、国道から２㎞の地点にあること、しかも国道の北側にあること、また、ＩさんとＥ君の家から同じ距離にあるというのが手掛かりである。(前頁の縮尺は、１：50,000)

実際には、方角を確かめ、地図の中に国道を見つけたり、その地図がある縮尺で描かれていることや自分達の家の位置を確認したりすることになろう。＜見当を付けて＞おおよその位置を見出すこともできようが、約束の時間もあるので可能な範囲で正確にＴ先生の家の位置を知りたいという状況である。

道に迷わないよう、また約束の時間に間に合うように図を描いて考えようとする。(モデル化する。) この場合、国道を直線と考えたり、Ｉさん、Ｅ君の家を点としたり、できるだけ正確な図が好ましいとか考える。さらに、Ｔ先生の家の位置は、次の二つの条件を同時に満たしていなければならないとか考えるであろう。

$p(x)$: 国道の北側２㎞の地点にある

$q(x)$: ＩさんとＥ君の家から同じ距離にある

解決を図るために何をすればよいか、状況はどのように整理できるかなど合理的に、かつ論理的に思考は進められる。その背後に、数学の言語（記号や図形）に翻訳した上で能率的に解決を図りたいという期待があることに気付く必要がある。こうしたことから、平行線及び垂直二等分線の作図による共通集合が得られればよいことになる。

数学的には、Ｔ先生の家の位置は、言うまでもなく次の論理式を満たす解の集合である。

$$\{x \mid p(x),\ x \in \mathrm{R}\times\mathrm{R}\} \cap \{x \mid q(x),\ x \in \mathrm{R}\times\mathrm{R}\}$$
$$= \{x \mid p(x) \wedge q(x),\ x \in \mathrm{R}\times\mathrm{R}\}$$

＜数学する＞ことの意味や数学が思考を進めるための有効な道具（ instrumentality ）として使用されていることが分かるのである。

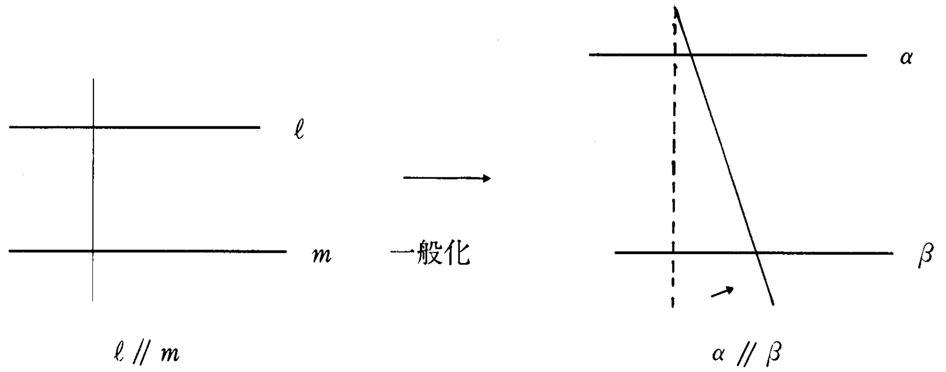
このように、現実的状位を数学の言語に直し、数学的手段に依って解決しようという意識を育てるようにすることが大切である。さらに言えば、当面する状況を扱い易い数学（の言葉）に翻訳する、あるいは翻訳の視点を求めるという経験が必要なのである。学習活動の中では生徒が自己の行為に気付くようにしたり、努めて目の前の事象を数学的な眼で観ようという意識を育てられるようにしたいものである。

2)知覚的理解を越えて論理的認識を目指そうとすること

計算アルゴリズムの理解や結果としての数学的事実、すなわち原理、法則とか公式を記憶することは重要である。ただそれが優先されると、この事実を支える豊かな概念が切り捨てられ、柔軟性を欠いたきわめて単調な学習に陥る。ともすると、一方向的に押し付ける指導になりがちで、次第に生徒の思考様式まで固定化してしまうことが心配される。

中学校第２学年で学習する「平行線」についていえば、小学校第４学年のときに＜一つの直線に垂直な二つの直線は平行である＞ことを学習している。中学校第１学年で、条件を満たす点の集合として、＜一つの直線から一定の距離にある点の集合は、その直線と平行になる二つの直線になる＞ことを学習し、中学校２学年で同位角、錯角を学んで、二つの直線が一つの直線に交わっているとき＜同位角（錯角）が等しいならば、この二つの直線は平行である＞こと

を学習するのである。(「同一平面上で交わらない2直線」は平行関係にあるというのが一般的定義であるが、操作的な曖昧さを避けるために上のように指導する。)



日常、並行する対象に、ある種特別なパターンを知覚する。教科書や黒板に書かれた平行線先から、言葉で説明される「平行」を認めることは難しいことではないだろう。しかし、概念的に「限りなく」平行であることやこれが有する幾何学的機能についての理解となると、語句を忠実に記憶するとか、ただ見ているだけ (behold) では分からない。確かに見れば分かることであるかも知れないが、感覚的にただ見えている (あるいは、そうらしい) というだけにしたくないのである。部分的知覚的にそう見えるという理解から、これを越えて論理的判断、推理に基づく認識へと高める必要がある。

小学校でも中学校でも＜平行＞概念の形成を目指すのであるが、中学校ではその捉え方を一層深めようとするのである。垂直だけでしか捉えられなかった平行関係が、中学校での学習では垂直でない場合にも捉えられるようになる。そのアイディアが同位角、錯角ということなのである。

しかも、これらは三角定規をある直線にそってずらすだけで得られる、すなわち、平行な2直線に交わる直線を活用すると、同位角や錯角の性質を使って角の大きさを変えずに移動することができるのである。つまり、平行線は角の大きさを変えないで移動したいときの有力な武器になるのである。

小学校で、分数の大小関係に関わる学習がなされる。($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$) を分数直線図表を見て比較し「分子が同じ分数は分母が小さい方が大きい。」(第4学年) を抽出したとしても、見えている部分についてはそうであると知覚認識した水準に留まっていることが多い。普遍的な事実として認識されるまでは相当の隔たりがあるように思われる。周知の通り、これは、高等学校で学習する次のような不等式の証明問題にも関わってくる高い水準の思考 (higher-order thinking)を要する内容なのである。

$a > b > 0$, $c > 0$ のとき, $\frac{b}{a}$, $\frac{b+c}{a+c}$ の大小を調べなさい。

一、二の事例をもってそうであることを簡単に理解してしまうのと注意深い観察による操作的理解 (operative understanding) がもたらす普遍的事実の認識とでは大きな違いがある。逆に、

これを認識するにはそれなりの数学的行為（ mathematical behavior ）が要請されるものと考えられる。

確かに、言語は有力なコミュニケーションの媒体ではある。しかし、上で述べたような‘価値の認識’は説明すれば分かるというものではない。他の数学的概念や原理・法則についても、どのようなアイディアのもとに構成され結実したものであるか十分に研究しておかなければならない。できあがった数学的事実 ready-made を伝えるという立場ではなく、それが創造的に構成されていく過程を検討しておいて、学習する価値が十分認識でき、それによって生徒が学習の仕方も自然に身に付けられるような展開を考えなければならない。

一人一人の生徒の理解の仕方は、教師が最もよく理解するところである。それに見合った学習の仕方を認め、学習したことが彼らにとってどのような知識として身に付いたか、あるいはどのような価値を見出したのか、確認できるように配慮しておくことが大切である。生徒自身が‘数学的知識としての価値’を見失うことがないような指導が必要とされよう。とかく国語的解釈に陥りがちな図形の学習で、例えば平行線のもつ機能あるいはそれを学習する価値が分かるように授業設計をすることが必要である。

3．数学教育における反省的思考の重要性

数学的な見方や考え方というと何か特殊なことをするように考えられてはいないだろうか。事象を数量や図形で捉えようとしたり、関係を見出そうとしたりする行為は、日常私たちがしていることである。数学的な見方や考え方を、このように「～という視点でものごとを見る」ことと考えるなら、意識するかどうかはともかく誰もがしていることなのである。

数学科における学習指導の実践に当たって、NCTM,‘STANDARDS’も「すべての児童生徒は数学的に考えることを学ぶことができる」を仮定することができないだろうかと呼びかけている。（ NCTM,‘ Professionals STANDARDS for Teaching Mathematics’ 1991. p. 21）

特徴的なことは、そこで私たちは、行き詰まっては振り返り、工夫しながら創造を図ってきたということである。数学的内容のすべてがこのように構成されてきたと言うのではないが、ある意味では、日常的な思考や行為を映し出したものが数学であると考えるとき、その日常的な思考や行為の反省的抽象（ reflective abstraction ）の経験が、数学の学習活動に是非とも必要である。

単に数学的事実を示したり説明するだけではなく、数学の本領に触れる機会を授業の中に用意する、生徒の学習活動として現れるように授業を設計することが大切である。例えば、正の数、負の数の学習にしても教師は「負の数はどうして必要なのか」、「正、負の数の計算をなぜ学習するのか」など、学習内容について予め十分検討しておかなければならない。

正の数、負の数の計算について言えば、教科書にあるからするというのではなく、自然数や有理数（分数）の計算から受けた限りない恩恵を、できることなら符号の付いた数からも得たいものだ、それには数として認めることができないといけないが、それでは自然数や分数のような四則の計算ができないものだろうか、同じような構造をしていないだろうか、こうした確かめをするために計算をしているのである。

数学では敢えて、これまでと矛盾しないように注意して、別な方途を工夫する。符号の付い

た数の導入である（例えば、$3-5=\overline{2}$）。周知の通り、これでいつでも減法は可能になった。また、減法はすべて加法に変えることもできるようになった（$3-\overline{5}=3+5$）。この事実は、看過しがちであるのだが、実は奇妙なことなのである。すなわち、減法を可能にするために導入したはずの符号の付いた数、これを（負の）数として認めた途端、減法が加法に吸収されたかのように減法が要らなくてもよい世界に入り込むことになるからである。

数学が自ら数の世界を拡げているようなこの現象は、人間を主語として考えれば、減法をいつでも可能とする数に数範囲を拡張したとみることができる。むしろ当たり前の思考の進め方であるはずなのに、それがもたらす神秘的な出来事であるからこそ、「数学的な」考え方といわれるのであろう。これまで複雑に絡んだ糸と思っていたものが、これによってあたかも山頂から街を眺めたときのように整然と目に映るのである。

用意された答を見つける活動だけでは、このような数学的な見方や考え方のよさを知ることは難しい。数学に深く関わり、直接「経験する」 experience 場が望まれる。数学は人間の思考の表現であると言われるが、このような意味で数学の自己発展的性格と、数学的活動が創造的であるということは相即不離の関係にあることに気付くことが必要である。そうすれば、なぜ負の数の学習をするのか、なぜ数学で文字を使用するのか、そして、さらに、なぜ数学を学習するのか、ということまで理解できるようになるものと思われる。

ま と め

ある対象を目の前にして思ったり感じたりすることは、生活環境や経験に応じて様々である。そのときのその人の心理状況によっても、受け取り方が変わるものだということは、私たちもしばしば経験している。私たちは、環境世界からの情報を解釈して生活しているのである。心情を素直に表現する小学校の段階では顕著である。これを承知していながら、とかく数学の時間になると感じ方に少しの差はあっても、生徒は同じように考え、同じように反応してくれるものだと考えてしまう。

様々な性格特性をもつ生徒が学習活動で多様な反応を示すのは、むしろ当たり前のことである。たとえ少数であれ、その反応について偏見をもたないようにして受け入れてやることが必要である。とりわけ、 informal なアプローチはその生徒なりの率直な考えが捉えられるものであるから認めてやるように心掛けることが大切である。

生徒は内的発現力を備えている。これは歴史的に著名ないわゆる実践的教育家がことごとく思い知らされ行き着いた教育的叡知ではなかったろうか。J. Dewey はそうした生徒の「敏活なまた複雑な知的興味の発展」を支えるものは、教師の＜心広い受容力＞open-mindedness であることを訴えている。それは、すなわち「子どものような純朴な態度を保存すること」である。学級にあっては、教師も生徒と同じ＜知識＞の探究者（ explorer ）であることを教えられる。

数学科の学習指導と評価について考えようとするなら、まずこうした探究者としての立場に立つ必要がある。その上で、生徒の知識活動の分析が不可欠であり、同時に数学の学習では、私たち教師に対しては、これまでのような知識の「言語的転送」verbal transmission の再吟味が求められよう。

また、学力について、単に個々の知識の貯蔵量だけで判定することも見直されてきている。生徒がどのような数学的見方や考え方を身に付けることができたかを観ようとするなら、教師自身、その授業で自分がどのような数学的な見方や考え方をするか問われることになるのである。知識を自己の所有物とするためには、おそらく自己の行為を観察する場が必要である。これを促すのが教師の仕事であろう。これが＜支援する＞ということなのである。すなわち、生徒の活動を受けとめ、励ましてやることであるが、さらに、一歩踏み込んで考えれば、それが評価するということであることに気付く。まさに 'An experience is not a true experience until is reflect . ' (J. Dewey) というのは、教師にとっても生徒にとっても大切にしなければならないことなのである。

ＮＣＴＭ（全米数学教師教会）の会長であった M. Sobel は、かつて学習に対する生徒の無関心や教師の無力感によって生起する学級の状況、雰囲気を（一般世論もこれを 'burnout' として指摘したところであるが)、それは「罪と非難の状況のもとに成長するものである」と警告している。生徒一人一人に対して個を生かし、個性を伸ばしていけるような学習指導と評価を実現しようとするなら、教師と生徒、そして生徒同士の信頼関係をつくりあげていくことが大切であろう。