放送大学研究年報　第4号 (1986) 41-53 頁
Journal of the University of the Air, No. 4 (1986) pp. 41-53

不確実な状況下におけるプラントの規模と配置の計画

横　山　雅　夫

Planning for Capacity and Location of Plants under Uncertainty

Masao YOKOYAMA

ABSTRACT

Optimum decision of capacity and location of plants is a basic planning problem which must be solved before the design of the plants themselves. It is often done under uncertain condition, where some parameters or data for calculation are not known precisely.

In this paper, a decision problem for capacity and location of plants containing uncertain parameters forecasted as random variables with known probability distribution is discussed. Planning model with two measures of scale—"expected profit" and "expected loss under the condition that profit is negative" is proposed.

The technique of changing the problem formulated as a special one containing random variables into a general optimization problem and simplifying procedure of probability distribution are developed to reduce the difficulty of calculation.

The meaning and effectiveness of the planning method proposed is shown clearly by the numerical examples.

1. 緒　　言

地理的に分散して存在する多数の需要地や原料（あるいは部品，製品）供給地に対して，生産工場や倉庫などの固定設備をどこに建設するか，また，その規模（容量）をいくらにするかという問題は，基本的な計画として重要な問題である．ところが，そのような基本計画の時点では，需要地の需要量等の計画に必要なデータは，実際には将来にわたって正確に把握できるとは限らない．

本研究の目的は，計画のために必要なデータ（以下パラメータと呼ぶ）の値が確率分布の形で予測されている場合の固定設備の配置と容量を決定する問題を考察し，よりよい計画方法を提案することである．

パラメータが確定的な場合の固定設備の配置・容量の決定に関しては，種々の研究が行われている．配置の決定についてその座標を変数とするもの[6,10]と，あらかじめ立地可能な多数の建設候補地のうちから建設地点を選択するもの[3,4,11]とがある．前者は輸送費用として2点間のユークリッド距離等に比例する費用を考慮している．しかし，実際には設備の建設については候補地が限られている場合が多く，また輸送費用が2点間の座標の関数として与えられることも実状を反映しないと考えられる点で，前者よりも後者のほうが実用上汎用性に富む．

一方，パラメータが確率分布の形で見積もられる場合を扱った研究にも，上記2つのタイプのものがあるが[7,9,12]，多くの研究がなされているわけではない．Jucker ら[7]は，正規分布に従う確率変数として不確実なパラメータの予測がされている場合の期待利潤と分散の重み付き和を最大にする建設計画について考えている．しかしながら，建設費用として固定費しか考慮していないため解きやすい形に問題が定式化されているものの，実用には供しがたいといえる．また，著者[12]も，需要量のみが適当な確率分布の形で見積もられる場合の問題を扱っている．

本研究では，多くの既往の研究と同様，代表的な場合として固定設備のうち工場だけを考え，これを以下プラントと呼ぶ．

本研究では，計画における「期待利潤」，および，プラント建設という投資に対する安全性を表わすものとして，「損失が生じるとしたときの損失額の期待値」注1) を取り上げ，両者を評価尺度とする計画問題を考える．そして，不確実なパラメータを考慮したため増加した問題の複雑さに対応して計算方法の工夫を行う．また，数値計算例を通じて，提案する計画方法の意味と有用性を明らかにする．

2. 不確実なパラメータを含むプラント建設計画

与えられた複数のプラント建設候補地と需要地を考える．プラントの建設地点と容量を決定するには，需要量などの，計算に用いるデータすなわちパラメータが確定値であるときは，利潤または費用の現在価値和を評価尺度とする最適化問題の定式化を行って，最適なプラント建設候補地の選択とプラント容量を求めればよい．しかしながら，パラメータに不確実なものが含まれる場合には，その不確実性を計画に反映するために，別の定式化と解法が必要になる．

初めに，考察する問題を明確にし，計画モデルを設定するにあたって，次のような前提を置く．

[前提条件]

(1) それぞれのプラントは同種の製品を生産する．

(2) 建設費用注2)は固定費付線形関数で表わされる．

(3) 生産費用と輸送費用は比例費用であるものとする．

(4) 各建設候補地には，立地容量上限が存在する．

(5) プラントには建設可能最小容量が存在する．

(6) 計画期間は，いくつかの小さな期に分けられ，各期内では需要速度（単位時間あたりの需要量）は一定とする．

(7) プラントの寿命注3)は既知の確定値であり，どのプラントについてもその寿命は同じ値であるものとする．

(8) プラントの寿命を問題の計画期間とする．

(9) プラント建設以前において不確実パラメータは確率分布の形で見積もられるものとする．

2.1. パラメータが確定値であるときの問題の定式化

まず，パラメータが確定値である場合のプラント建設計画の問題を記述すると，利潤現在価値和 R を最大化するようにプラントの建設候補地の選択と容量の決定を行う問題として，以下の問題 P1 のように書かれる．

ここで，記号を次のように定める．

d_{jt}：t 期，需要地 j の需要量（需要速度）（単位/年）

i ：プラント建設候補地の番号（$i=1, \cdots, I$）

j ：需要地の番号（$j=1, \cdots, J$）

p_i ：プラント建設費用の比例定数（円・年/単位）

q_i ：プラント建設費用の固定項（円）

r_{ijt}：y_{ijt} に対応する単位製品あたり，販売収入より生産・輸送費用を差し引いた値（円/単位）

T ：計画期間（期）

t ：計画期間内の分割された期の番号（$t=1, \cdots, T$）

w_i ：建設候補地 i にプラントを建設するときに 1，そうでないときに 0 をとる 0-1 変数

y_{ijt}：t 期に建設候補地 i のプラントで生産し，需要地 j へ輸送する製品の量（単位/年）

z_i ：建設候補地 i に建設するプラントの容量（単位/年）

$\bar{z}_i$ ：建設候補地 i のプラント建設可能容量上限（単位/年）

$\underline{z}_i$ ：プラントの技術的，政策的建設可能容量下限（単位/年）

α ：割引率

θ ：1 期の長さ（年）

[問題 P 1]

目的関数（最大化）：

$$R=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\theta(1+\alpha)^{1-t}r_{ijt}y_{ijt}-\sum_{i=1}^{I}(p_i z_i+q_i w_i) \tag{1}$$

制約条件：

$$\sum_{i=1}^{I} y_{ijt}\leqq d_{jt}, \qquad j=1, \cdots, J;\ t=1, \cdots, T \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{J} y_{ijt}\leqq z_i, \qquad i=1, \cdots, I;\ t=1, \cdots, T \tag{3}$$

$$\underline{z}_i w_i\leqq z_i\leqq \bar{z}_i w_i, \qquad i=1, \cdots, I \tag{4}$$

$$y_{ijt}\geqq 0, \qquad i=1, \cdots, I;\ j=1, \cdots, J;\ t=1, \cdots, T \tag{5}$$

$$w_i=0, 1, \qquad i=1, \cdots, I \tag{6}$$

ここで，目的関数の第一項の和は，販売収入から生産・輸送費用を差し引いた値の現在価値和，第二項の和は建設費用の和を表わす．また式 (2) は，生産・輸送量が各需要地の

需要量を越えないという条件，式 (3) は，生産・輸送量がプラントの容量を越えないという条件，式 (4) は，プラントを建設するときは，下限 $\underline{z}_i$ 以上，上限 $\bar{z}_i$ 以下の容量のものを作らなければならないことを示す条件である．

2.2. 不確実なパラメータを含む計画

問題 P1 は，建設容量を $\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, \cdots, z_I)$，対応する 0-1 変数を $\boldsymbol{w}=(w_1, w_2, \cdots, w_I)$，その他の変数を $\boldsymbol{y}$ で表わすと，次のように書きなおせる．

[問題 P1′]

目的関数（最大化）:

$$R=\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{w}) \tag{7}$$

制約条件:

$$A\boldsymbol{y}+B\boldsymbol{z}+C\boldsymbol{w}\leqq\boldsymbol{h} \tag{8}$$

$$\underline{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{w}^T\leqq\boldsymbol{z}\leqq\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{w} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{z}\geqq\boldsymbol{0} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{w}\in S \text{ (0-1 条件)} \tag{11}$$

ただし，$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{h}, A, B, C, \underline{\boldsymbol{z}}, \bar{\boldsymbol{z}}$ は定数のベクトルあるいは行列である．

これらの定数の中に不確実なパラメータが含まれていて，それがプラント建設計画の時点で，何らかの確率分布に従う量として予測されているものとする．

今，それら不確実なパラメータをまとめて $\boldsymbol{U}$ で表わすものとする．本研究においては，計算の便宜上離散的確率分布を考え，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}_l$ となる確率が P_l $(l=1, 2, \cdots, L)$ であるものとする．ただし，$\sum_{l=1}^{L} P_l=1$ である．β 分布や正規分布などの連続分布として予測が行われるときや，相関のある確率分布を考えるときも，このような形の離散的確率分布に近似的に変換できる．

プラントの建設は，不確実なパラメータ $\boldsymbol{U}$ の実現値が知られる前に行われるという意味で，$\boldsymbol{z}$ の決定は不確実性のもとでの先行的な意思決定となる．一方，$\boldsymbol{y}$ は，定められた $\boldsymbol{z}$ と実現した不確実なパラメータの値をもとに決定することができる．このように，不確実なパラメータが含まれるときは，変数の決定過程から見て $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{y}$ とは性質が異なったものとなる．

今，$\boldsymbol{z}$ を固定したとき，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}_l$ に対して問題 P1′ を解き，利潤現在価値和 R（以下たんに利潤 R と呼ぶ）を最大化したときの R の最適値を $R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l)$ と表わすと，$\boldsymbol{z}$ を固定したという条件のもとでの利潤の最適値 $R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{U})$ は，確率 P_l で実現値 $R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l)$ をとる確率変数とみなせる．

さて，プラント建設計画に限らず，一般に，確率分布の与えられた不確実なパラメータを含む計画問題においては，次のように種々の評価尺度を用いて問題を定式化することが提案されている．

（1） 元の確定的な問題の目的関数が利潤の場合

① 利潤の期待値を最大化
② 利潤の期待値と分散の重み付き和を最大化[7]
③ 利潤の期待値に関する制約のもとに利潤の分散を最小化

（2） 元の確定的な問題の目的関数が費用の場合
① 費用の期待値を最小化
② 費用の期待値に関する制約のもと，費用の分散を最小化[2,8]
③ 費用 C と指定された aspiration level γ に対して，$P\{C \leqq \gamma\}$ を最大化 (aspiration criterion)[1,2,8]
④ 費用 C と指定された値 α に対して，$P\{C \leqq \delta\} \geqq \alpha$ となる δ を最小化 (fractile criterion)[1,2,5,8,9]

（2）の ③，④ は，費用を利潤に置き換えても同様の考え方はできるものと思われる．

プラント建設計画への応用を考えると，上記の考え方はいくつかの問題点を有する．まず，目的関数として期待値のみを用いるのは，計画に対する失敗の危険性をまったく考慮できないので，不十分であると思われる．また，分散を用いるとしても，利潤の分散がどれほど小さければよい計画であるといえるのか明確でないし，まして，期待値との一次結合を作ればますます実際的な意味がわからなくなる．また，③ や ④ は，費用をある値以下におさえたいという考え方をうまく反映するものといえるが，利潤に置き換えて考えると，γ や α をどう設定すればよいのかわからないし，また得られた解がどういう意味でよい計画といえるのか明確でない．

そこで本研究では，より適切な評価尺度とそれを用いた計画方法（計画の考え方）を以下のように提案する．

さて，プラントの建設というような設備投資の計画では，利潤の期待値とともに，予測がはずれたため損失が発生しないかということが特に重要であるものと思われる．そこで本研究では，パラメータの予測がはずれたときの投資に対する安全性をも考慮に入れた計画を作成するために，期待値 $E\{R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{U})\}$ のみならず，この $R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{U})$ の分布の形を考慮して，次のような量 Q を導入する．

$$Q = -\sum_{l=1}^{L} P_l n_l R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l) \tag{12}$$

ただし，

$$n_l = \begin{cases} 1, & R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l) < 0 \\ 0, & R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l) \geqq 0 \end{cases} \tag{13}$$

この Q は，損失（負の利潤）が発生するとしたときの，生ずる損失額の期待値を表わすものである．プランド建設に対する投資的危険性を，一般に考えられる指標である損失確率や利潤の分散などの値よりも，より明確に表わす量と考えられる．しかしながら，$E = E\{R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{U})\}$ 最大化と Q 最小化とは一般に両立しない．そこで，指定された Q の値 Q_0 に対して $Q \leqq Q_0$ を満たすという条件のもとに E を最大にする，次のような問題を考える．

[問題 P2]

目的関数（最大化）:

$$E = \sum_{l=1}^{L} P_l R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l) \tag{14}$$

制約条件:

$$\boldsymbol{z} \in S_z \tag{15}$$

$$Q = -\sum_{l=1}^{L} P_l n_l R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l) \leqq Q_0 \tag{16}$$

$$n_l = \begin{cases} 1, R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l) < 0 \\ 0, R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_l) \geqq 0 \end{cases}, \qquad l=1, \cdots, L \tag{17}$$

ただし，式 (15) はプラント建設容量に関する制約条件を意味するものとする．

Q_0 の値を少しずつ変えて問題 P2 を解くことによって，E と Q を 2 つの目的関数とする多目的計画問題のパレート最適解も求めることができる．

3. 計 算 方 法

問題 P2 には，目的関数と制約式に陽的な表現のできない $R_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{h}_l)$ という関数が含まれているので，解法上の工夫が必要である．本研究では，問題 P2 に変数を追加することによって通常の 0-1 混合整数計画問題に等価変換して解く方法をとるものとする．

さて，議論の煩雑さを避けるために，代表的な場合として，係数 $\boldsymbol{h}$ のみに不確実なパラメータが含まれている場合に対して式を展開する．その他の場合も同様に考えることができる．

簡単のため，$\boldsymbol{h}$ 全体を確率変数ベクトルとみなして，改めて $\boldsymbol{H}$ と書き，$\boldsymbol{H}$ の確率分布を改めて $P_l = P\{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h}_l\}$ $(l=1, \cdots, L)$ とし，$\boldsymbol{h}_l$ に対応した変数 $\boldsymbol{y}_l$ および F_l を新たに導入すれば，問題は次のように書き換えられる．

[問題 P3]

目的関数 (最大化):

$$E = \sum_{l=1}^{L} P_l \{\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{y}_l - (\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{z} + \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{w})\} \tag{18}$$

制約条件:

$$A\boldsymbol{y}_l + B\boldsymbol{z} + C\boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{h}_l, \qquad l=1, \cdots, L \tag{19}$$

$$\underline{\boldsymbol{z}}^T \boldsymbol{w} \leqq \boldsymbol{z} \leqq \bar{\boldsymbol{z}}^T \boldsymbol{w} \tag{20}$$

$$F_l \leqq \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{y}_l - (\boldsymbol{p}^T z + \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{w}), \qquad l=1, \cdots, L \tag{21}$$

$$F_l \leqq 0, \qquad l=1, \cdots, L \tag{22}$$

$$-\sum_{l=1}^{L} P_l F_l \leqq Q_0 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{z} \geqq \boldsymbol{0}. \ \ \boldsymbol{w} \in S \tag{24}$$

$$\boldsymbol{y}_l \geqq \boldsymbol{0}, \qquad l=1, \cdots, L \tag{25}$$

この問題は線形の 0-1 混合整数計画問題であり，確定的な問題に比べて変数が増した分だけ大規模な問題になっている．問題の性質上，制約行列が双対角形構造になっているので，これを生かした解法を用いることができるけれども，それでも確率変数ベクトルの数 L が大きいと計算は容易でない．そこで本研究では，以下のように問題を縮小して近似解 (ε-最適解) を得る方法を提案する．

まず，点 $\boldsymbol{h}_l(l=1,\cdots,L)$ を，その中に互いに距離の近いものが含まれるように，いくつかのグループ $G_k(k=1,\cdots,K)$ に分ける．ただし，各グループには可能な限り同じ個数の点が含まれるようにする．そして，$\boldsymbol{y}_l'=P_l\boldsymbol{y}_l(l=1,\cdots,L)$ なる変数 $\boldsymbol{y}_l'$ を用いて問題を書き換えるとともに，同一グループ内の点に対応する制約式を辺々加えてそれぞれ 1 つの制約式としたものを制約とする問題 P4 を作る注4)．

[問題 P 4]

目的関数 (最大化)：

$$E=\sum_{k=1}^{K}\{\boldsymbol{r}^T\sum_{m\in G_k}\boldsymbol{y}'_m-\sum_{m\in G_k}P_m(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{w})\} \tag{26}$$

制約条件：

$$A\sum_{m\in G_k}\boldsymbol{y}_m'+\sum_{m\in G_k}P_m(B\boldsymbol{z}+C\boldsymbol{w})\leqq\sum_{m\in G_k}P_m\boldsymbol{h}_m,\qquad k=1,\cdots,\ K \tag{27}$$

$$\underline{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{w}\leqq\boldsymbol{z}\leqq\bar{\boldsymbol{z}}^T\boldsymbol{w} \tag{28}$$

$$\sum_{m\in G_k}P_mF_m\leqq\boldsymbol{r}^T\sum_{m\in G_k}\boldsymbol{y}'_m-\sum_{m\in G_k}P_m(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{w}),\qquad k=1,\cdots,K \tag{29}$$

$$\sum_{m\in G_k}P_mF_m\leqq0,\qquad k=1,\cdots,K \tag{30}$$

$$-\sum_{k=1}^{K}\sum_{m\in G_k}P_mF_m\leqq Q_0 \tag{31}$$

$$\boldsymbol{z}\geqq\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{w}\in S \tag{32}$$

$$\boldsymbol{y}_m\geqq\boldsymbol{0},\quad \forall_m\in G_k;\qquad k=1,\cdots,K \tag{33}$$

ここで，さらに，

$$\boldsymbol{y}_{G_k}=(\sum_{m\in G_k}\boldsymbol{y}'_m)/(\sum_{m\in G_k}P_m),\qquad k=1,\cdots,K \tag{34}$$

$$F_{G_k}=(\sum_{m\in G_k}P_mF_m)/(\sum_{m\in G_k}P_m),\qquad k=1,\cdots,K \tag{35}$$

$$P_{G_k}=\sum_{m\in G_k}P_m,\qquad k=1,\cdots,K \tag{36}$$

とおくと，問題は次のようになる．

[問題 P 5]

目的関数 (最大化)：

$$E=\sum_{k=1}^{K}P_{G_k}\{\boldsymbol{r}^T\boldsymbol{y}_{G_k}-(\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{w})\} \tag{37}$$

制約条件:

$$Ay_{G_k}+Bz+Cw\leqq(\sum_{m\in G_k}P_m h_m)/P_{G_k},\qquad k=1,\cdots,K \tag{38}$$

$$\underline{z}^T w\leqq z\leqq\bar{z}^T w \tag{39}$$

$$F_{G_k}\leqq r^T y_{G_k}-(p^T z+q^T w),\qquad k=1,\cdots,K \tag{40}$$

$$F_{G_k}\leqq 0,\qquad k=1,\cdots,K \tag{41}$$

$$-\sum_{k=1}^{K}P_{G_k}F_{G_k}\leqq Q_0 \tag{42}$$

$$z\geqq 0,\quad w\in S \tag{43}$$

$$y_{G_k}\geqq 0,\qquad k=1,\cdots,K \tag{44}$$

この問題 P 5 を解き，最適解のうちのプラント建設容量を z^{P5}，最適値を E^{P5} とする．問題 P 5 は問題 P 3 の緩和問題だから，真の最適値 E^{P3} に対して，$E^{P3}\leqq E^{P5}$ となる．次に，建設容量を $z=z^{P5}$ に固定して問題 P 3 を解き，最適値を E^*, Q の値を Q^* とする．ここで，問題が実行不可能のときは，実行可能になるまで Q_0 の値を増加することによって (E^*, Q^*) を求めるものとする．

そこで，Q_0 の値を種々に変えて，(E^*, Q^*) を求めれば，(E^{P5}, Q_0) の描くグラフを上界とする近似的なパレート最適値のグラフを描くことができる．

4. 数値計算例

本研究の提案する計画方法の意味と有用性を明らかにするために，以下に数値計算例を示す．

4.1. 数値計算例のためのデータ

本数値計算例では，建設候補地，需要地のほかに，原料供給地も考え，原料供給地よりプラントへの原料購入・輸送も問題に含めて考えるものとする．すなわち，原料供給地数 2，建設候補地数 3，需要地数 3，期の数 5 期（1 期=1 年とする）の問題を考える．需要速度と原料の供給速度の上限のみが不確実なパラメータであるものとする．

数値計算例として，計算例 1 と計算例 2 の 2 種類を示す．表 1〜5 に計算例 1 のためのデータを示す．$C^{(1)}_{hit}$ は，t 期に原料給地 h より建設候補地 i のプラントへ輸送する単位あたりの原料購入・輸送費用を表わす．$C^{(2)}_{ijt}$ は，t 期に建設候補地 i のプラントより需要地 j に輸送する単位製品あたりの生産・輸送費用で，単位あたりの販売収入は 210 円とする．表 5 の S_{1t}, S_{2t} は，それぞれ原料供給地 1 および 2 の t 期の供給量の上限を表わす．計算例 2 のためのデータとしては，計算例 1 のデータのうち表 1 の $C^{(1)}_{12t}$ 値のみを 50円/単位から 60円/単位に変更したものを使うものとする．

表 1〜3 は確定値であるものとして取り扱うパラメータの値で，表 4, 5 は需要速度および原料の供給速度上限の予測値を確率分布で表わしたものである．表 1, 2, 4, 5 における

表 1. 原料購入・輸送費用 $C_{hit}^{(1)}$ (円/単位)

h \ i	1	2	3
1	50	50	70
2	70	50	50

表 2. 製品生産・輸送費用 $C_{ijt}^{(2)}$ (円/単位)

i \ j	1	2	3
1	45	55	75
2	55	45	55
3	75	55	45

表 3. 建設費用

候補地番号 i	建設費用比例定数 p_i (円・年/単位)	建設費用 定項 q_i (円)
1	2.419×10^2	5.42×10^8
2	2.475	5.57
3	2.173	4.97

表 4. 確率分布 (需要量)

需要量			確率
d_{1t} ($\times10^6$ 単位/年)	d_{2t} ($\times10^6$ 単位/年)	d_{3t} ($\times16^6$ 単位/年)	
4.5	9.0	6.0	0.1
3.75	7.5	5.0	0.2
3.0	6.0	4.0	0.4
2.25	4.5	3.0	0.2
1.5	3.0	2.0	0.1

表 5. 確率分布 (原料供給量)

供給量上限		確率
S_{1t} ($\times10^6$ 単位/年)	S_{2t} ($\times10^6$ 単位/年)	
16.0	12.0	0.1
16.0	10.0	0.2
16.0	8.0	0.4
16.0	6.0	0.2
16.0	4.0	0.1

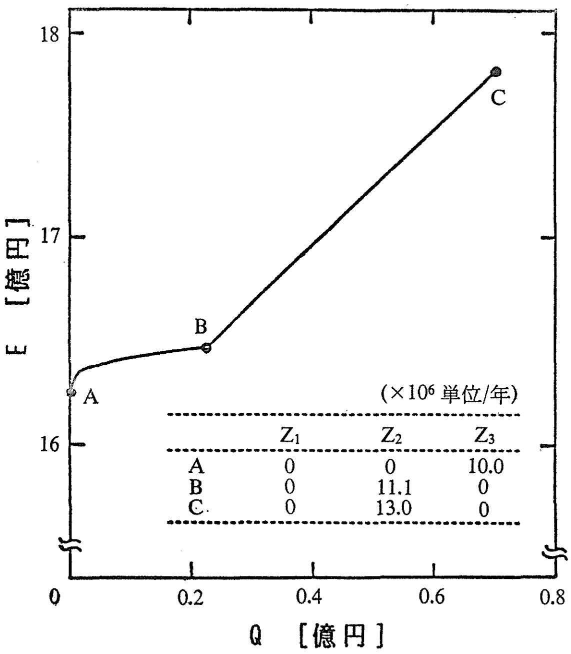

図 1. E—Q パレート最適値と建設容量（計算例 1）

定数は簡単のためすべての $t\in[1, T]$ に対して同じ値であるものとする．また，簡単のため，すべての i に対して $\underline{z}_i=2\times10^6$ 単位/年，$\bar{z}_i=16\times10^6$ 単位/年とし，製品と原料はそれぞれ 1 品種で，原料 1 単位に対して生産される製品は 1 単位とする．また $\alpha=0.08$ とする．

本例においては，需要速度については 3 つの確率変数が存在し，また原料供給速度の上限については 2 つのうち 1 方のみが不確実である場合を考えている．需要速度と原料の供給速度の上限は独立である．したがって確率ベクトル $\boldsymbol{H}$ の分布は，$L=25$ の実現可能値をもつ確率分布となる．

4.2. 計算結果

Q の上限 Q_0 を種々に変えて問題 P 3 を計算し，建設容量 $\boldsymbol{z}$ と期待利潤 E の値を求めた．計算例 1, 2 に対する結果を，それぞれ図 1, 2 に示す．建設容量 $\boldsymbol{z}=(z_1, z_2, z_3)$ については代表的な場合のみを図中の表で示している．図の曲線は，E と Q を 2 つの目的関数とする多目的計画問題のパレート最適値のグラフにもなっている．その性質から曲線はともに単調増加である．

以下に 2 種類の結果をそれぞれ説明する．

計算例 1. 図 1 において，点 C は Q に制約がない場合の，E を最大にする建設容量に対する (Q, E) を表わす．その建設容量は $z_1=z_3=0$ 単位/年，$z_2=13.0\times10^6$ 単位/年であり，これは，計算例 1 では不確実なパラメータの期待値に対して通常の最適化を行っ

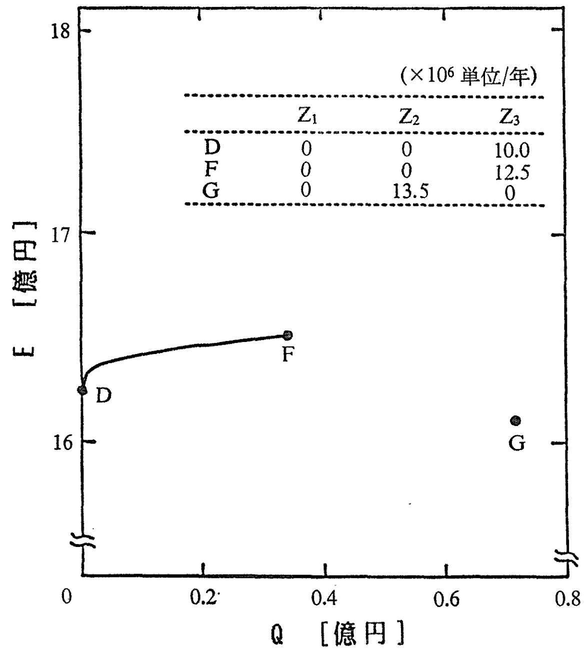

図 2. E—Q パレート最適値と建設容量 (計算例 2)

て求めた建設容量と一致した．この点では利潤の期待値は $E=17.81\times10^8$ 円で，最大であるが，Q が 7.0×10^7 円と大きくて，計画に対する安全性が乏しいといえる．C から B までの点に対応する建設容量は，z_2 のみが正で，建設地点は同一である．C から B に行くにつれて Q は小さくなるが同時に E も小さくなる．B を過ぎると建設地点が $i=3$ に変わり注5)，B から A までの点に対応する建設容量は z_3 のみが正である．そして A で $Q=0$ 円となる．

計算例 2. 図2において，点 F は Q に制約がない場合の，E を最大にする建設容量に対する (Q, E) を示す．一方，点 G は，不確実パラメータの期待値に対して通常の最適化を行って求めた建設容量に対する (Q, E) を表わす，F と G は一致せず，その建設容量も表で示すように異なっている．曲線 DF 上の点に対応する建設容量は z_3 のみが正であり，計算例1のように建設地点が曲線の途中で変化することはない．点 G は，曲線 DF 上のどの点に比べても E と Q の値がともに劣っていることは興味深い．

4.3. 本研究の計画方法の特長と有用性

(1) 不確実なパラメータの期待値に対して求めた最適な建設容量と，期待利潤を最大化 (Q 無制約) する建設容量は，数値計算例でもわかるように，一般に一致しない．

(2) 不確実なパラメータの期待値に対して求めた最適な建設容量に対する点は，計算例1のように E-Q パレート最適値のグラフ上か，または計算例2のようにグラフの右下に存在する．前者の場合は，次項 (3) の意味で，また後者の場合は，E-Q パレート最適

値のグラフ上に，E が大きく Q が小さな，よりよい解が存在するという意味で，本計画方法は，不確実なパラメータの期待値を用いた最適計画より優れているといえる．これは，不確実なパラメータの期待値を用いる場合に限らず，本計画方法以外のどのような計画と比較しても同じことがいえる．

（3） E だけでなく Q をも評価尺度として考えることによって，安全性を考慮した，より柔軟な意思決定を行うことができることがわかる．すなわち，図 1，2 のようなパレート最適値のグラフを見て，許される Q の値より考えて適当と思われる 1 点を選べばよいのである注6)．

5. 結　言

（1） 確率分布の形で予測された不確実なパラメータを含むプラントの建設地点と容量の決定問題について検討し，合理的な意思決定の考え方として，期待利潤と，損失を生じるとしたときの損失額の期待値という 2 つの評価尺度を考えたモデルを構築した．

（2） 計算における困難を軽減し，計画方法を実用的なものにするために，計算方法の工夫を行った．

（3） 数値計算例を通じて，提案する計画方法の意味と有用性を明らかにした．

注

1) 後述のごとく，いわゆる「条件付期待値」とは異なる．
2) プラント建設費用は，初期建設費用に，建設後の維持費と寿命時の処分費用または残存価値を現在価値に換算したものを加えるかまたは減じたものである．
3) 本来の寿命または便宜的に定めた寿命．
4) グループ化の方法についてはさらに検討が必要である．
5) B においては 2 種類の建設容量が存在するが，図 1 では 1 つのみを示している．
6) $Q=0$ の点が最も良いとは言えない．確率分布が正しくなければ $Q=0$ であってもまったく安全であるとは言えないし，また財政上余裕があれば，Q がある程度大きくとも E が大きいほうが望ましい計画である場合もあるからである．

参考文献

1) Charnes, A. and W. W. Cooper: “Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisfying under Chance Constraints,“ Oper. Res., Vol. 11, No. 1, pp. 18–39, (1963).
2) Geoffrion, A. M.: “Stochastic Programming with Aspiration or Fractile Criteria,” Manage. Sci., Vol. 13, No. 9, pp. 672–679, (1967).
3) Geoffrion, A. M. and G. W. Graves: “Multicomodity Distribution System Design by Benders Decomposition,” Manage. Sci., Vol. 20, No. 5, pp. 822–844, (1974).
4) Geoffrion, A. M. and R. McBride: “Lagrangean Relaxation Applied to Capacitated Facility Location Problems,” AIIE Trans., Vol. 10, No. 1, pp. 40–48, (1978).
5) Hazell, P. B. R.: Comment on the Fractile Approach to Linear Programming under Risk,” Manage. Sci., Vol. 17, No. 3, pp. 236–237, (1970).
6) 今西浩二，中村信人：“生産のロジステック・システムに関する研究．”日本機械学会論文集，Vol. 45, No. 393, pp. 615–622, (1979).
7) Jucker, J. V. and R. C. Carlson: “The Simple Plant-Location Problem under Uncertainty,” Oper. Res., Vol. 24, No. 6, pp. 1045–1055, (1976).

8) Sengupta, J. K. and J. H. Portillo-Campbell: "A Fractile Approach to linear Programming under Risk," Manage. Sci., Vol. 16, No. 5, pp. 298–308, (1970).
9) Seppälä, Y.: "On a Stochastic Multi-Facility Location Problem," AIIE Trans., Vol. 7, No. 1, pp. 56–62, (1975).
10) Sherali, A. D. and C. M. Shetty: "The Rectilinear Distance Location-Allocation Problem," AIIE Trans., Vol. 9, No. 2, pp. 136–143, (1977).
11) 横山雅夫. 早川豊彦: "プラントの容量と配置の最適決定——候補地のグループ化を用いた近似解法", 日本経営工学会誌, Vol. 35, No. 5, pp. 285–291, (1984).
12) 横山雅夫, 早川豊彦. 人見勝人: "プラントの容量と配置の最適決定——予測需要量が不確実な場合に対する解法," 日本経営工学会誌, Vol. 32, No. 5, pp. 378–384, (1981).

(昭和 61 年 12 月 25 日受理)