放送大学審査学位論文（博士）

軌道計算法から見た
超短周期彗星発見の歴史

放送大学大学院文化科学研究科文化科学専攻

博士後期課程 自然科学プログラム

２０１４年度入学

植　村　　栄　治

２０１８年3月 授与

目　次

序　　論

彗星は、太陽系小天体のうち、主に氷や塵でできていて、太陽に近づくとそれらの物質を放出してコマや尾を生じるものを指す。

彗星には、再び太陽近辺に回帰する周期彗星と、二度と戻ってこない非周期彗星とがある。一般に、その公転周期が200年未満の彗星を短周期彗星と呼び、200年以上の彗星を長周期彗星と呼ぶが、長周期彗星を非周期彗星に含める場合も多い[1)]。

本論文では、公転周期が数年程度の短い彗星を重点的に考察するので、周期彗星のうち公転周期が10年以下のものを、必要に応じて、特に「超短周期彗星」と称することにする。

彗星が近代的な自然科学の対象として考察されるようになったのは17世紀のアイザック・ニュートン(Isaac Newton, 1642-1727)の頃からである[2)]。ハレー彗星は、初めて発見された周期彗星(周期約75年)であるが、その規則的な出現が予言されたのは18世紀初めのことであった[3)]。

18世紀の天文学者たちは、ハレー彗星のほかにも周期彗星が存在することを想定していたが、そのほとんどはハレー彗星以上の長い周期を有する彗星であった。ただ1770年に観測されたレクセル彗星については、アンダース・レクセル(Anders Johan Lexell, 1740-1784)によって5年余という異例に短い周期が算定された。しかし、その回帰を確認することができず、「超短周期彗星」として公認されるには至らなかった。

18世紀末には，3個の観測から彗星の放物線軌道を計算するためのより進んだ方法がハインリッヒ・オルバース(Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers, 1758-1840)によって発表された[4)]。これにより、非周期彗星の軌道計算は格段に正確になった。

また、3個の観測から天体の楕円軌道を計算する方法は、1801年にカール・フリードリッヒ・ガウス(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)によって初めて編み出された。ガウスは小惑星ケレスの楕円軌道を正確に計算することに成功し、その再発見に貢献した。ガウスが考案し改良を重ねた楕円軌道の計算方法は1809年の彼の著書『天体運動論』[5)]において公開された。こうして、概ね1810年以降は、放物線軌道であれ楕円軌道であれ、数少ない観測データに基づいて彗星の軌道計算を相当程度正確に行うことが可能な状況となっていた。

このような軌道計算技術の進展により、1810年代においては、1811年に現れたフロジェルグ彗星、1812年に現れたポンス・ブルックス彗星、1815年に現れたオルバース彗星等の周期彗星について、相当に精度の良い周期の算定が行われた。もっともこれらの彗星が実際に周期彗星であるということは2度目の回帰が確認されて初めて公認されるので、1810年代末の時点では、ハレー彗星に続く第2の周期彗星はまだ公認されていなかった。

このような状況の下で、1818年11月に新たな彗星が発見された。その観測データを検討した当時27歳のヨハン・フランツ・エンケ(Johann Franz Encke, 1791-1865)は、この彗星の軌道が1805年に現れた彗星と似ていることに気が付

いた。この彗星は楕円軌道を描いており、その周期は 3 年余と算定された。もし両者の彗星が同一であり、その周期が 3 年余であることが立証されれば、ハレー彗星よりはるかに短い周期を持って木星の内側を回る彗星が存在することになり、天文学上の画期的な発見となる。

エンケは師であるガウスの支援も得て、数か月に及ぶ苦心の計算作業の末、1805 年の彗星と 1818 年の彗星の軌道が正確に一致することを立証し、初の超短周期彗星の発見者となる栄誉を得た。

本論文は、このようにエンケによって初の超短周期彗星が発見されるに至った過程やその発見の意義を主に軌道計算法の観点から歴史的に考察することを目的とする。その具体的な内容は次の通りである。

「第 1 部 超短周期彗星発見の前史 —— レクセル彗星の検討を中心として」では、実質的には 1818 年のエンケ彗星に先立って発見されていた超短周期彗星である 1770 年のレクセル彗星について検討する。特に、レクセルが、師と仰ぐレオンハルト・オイラー(Leonhard Euler, 1707-1783) の計算方法を受け継いでどのように軌道計算を行ったのかを解明し、まだオルバースやガウスの計算技法が知られていない時代になぜ正確な周期算定が可能だったかを探る。

「第 2 部 天体の軌道計算の発展に関する考察 —— 1797 年～1818 年を中心に」では、まず、放物線軌道の一般的な計算方法を示した 1797 年のオルバースの著書や 1801 年に小惑星ケレスの楕円軌道の計算に成功したガウスが 1809 年に著した『天体運動論』の概略を検討する。そして、それらの知見を踏まえてフリードリッヒ・ベッセル(Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846)が 1810 年の著書で初めて最小二乗法による精密な軌道計算の仕方を世に示したことを紹介し、その後、ガウスの 1811 年の論文やガウスの弟子のフリードリッヒ・ニコライ(Friedrich Bernhard Gottfried Nicolai, 1783-1846)の 1813 年の論文等によって、最小二乗法を用いた軌道計算が次第に知られていく様子を明らかにする。

「第 3 部 エンケ彗星発見の過程の考察 — 1819 年を中心に」では、ガウスの愛弟子のエンケが 1818 年の彗星と 1805 年の彗星の同一性に気が付いてから膨大な計算によってそれを実証しガウスに賞賛されるまでの過程を、書簡の原本等を参照しつつ綿密に検証する。また、そのエンケの実証においては、最小二乗法による軌道計算の精密化がその決め手となった事情を明らかにする [6)]。

「第 4 部 総括的考察」では、ニュートンからエンケに至る軌道計算の精度の変遷を総括的に考察するとともに、軌道計算の精度向上の決め手となった最小二乗法が実際にガウス、ベッセル、エンケらの間でどのように使用されていたのかを最終的に検証する。最後に、エンケが史上初の超短周期彗星発見という栄誉を担うことができた背景には多数のドイツ人天文学者らによるバックアップが存在したことを指摘して本論文の結びとする。

第 1 部　超短周期彗星発見の前史 ―― レクセル彗星の検討を中心として

第 1 章　オイラーの軌道計算法 ―― 1769 年彗星の軌道計算について

1．1769 年彗星の発見

1769 年 8 月 8 日にパリ在住のシャルル・メシエ(Charles Messier, 1730-1817)は或る彗星を発見した（以下この彗星を「1769 年彗星」と呼ぶことがある)。1769 年彗星は 1769 年 12 月頃まで観測され、多くの天文学者たちがその軌道計算を行った。オイラーは、1770 年 9 月 10 日にロシア科学アカデミーでこの彗星についての講演を行い、同年にその内容を書物[7]（以下「1770 年書」という）にして刊行した。彼は、その中で、天体の軌道計算に関する独自の方法を詳しく説明し、この彗星は周期 482 年程度の楕円軌道を描いているとの結論を示した。オイラーは、それ以前に 1744 年の著作[8]で天体の軌道の計算方法を論じたが、その方法は相当に長い計算を要するものであり、この計算方法を引き継ぐ者は現れなかったと評されている。1769 年彗星に関してオイラーが使用した計算方法は、1744 年のものと多少異なるとされるが、同じく多量の計算を要するものであった[9]。

1769 年彗星の軌道計算を説明した 1770 年の書物の執筆についてはレクセルも深く関与しており、後のレクセルによる 1770 年彗星の軌道計算に大きな影響を与えたと考えられる。そこで本章では、オイラーがこの 1770 年書で示した軌道計算法のあらましを紹介する[10]。

2．1770 年書の概要

1770 年書は序に当たる部分のほか、第 1 部から第 3 部までで構成され、全 162 頁から成る。その目次は次の通りである。

以下、1770 年書の内容を各章ごとに簡単に紹介しよう。

（1）「1769 年の 8 月から 12 月まで現れた彗星の運動の決定（第 1 節～第 8 節。1 頁～13 頁)」について

これはいわば全体の序である（この第 1 節～第 8 節を「序部」と呼ぶことにする)。この本のテーマである 1769 年彗星の軌道計算を行う前に、基礎となる資料を見ておくという趣旨で、1769 年 8 月 11 日から同年 12 月 1 日までの全 65 個の観測データが提示されている。それぞれの観測者としては、メシエ（パリ)、ザノッティ（ボローニャ)、マイヤー（ペテルスブルク)、マラルディ（パリ）のいずれかの名が挙げられている。観測は 8 月 8 日から 9 月 15 日まではほとんど毎日行われていたが、その後しばらく彗星が太陽に接近したため見えなくなり、10 月 22 日から再び観測されるようになった。もっともそれ以後は、見えない日が多く、観測できたのは 10 月 22 日・24 日・27 日、11 月 4 日・20 日・27 日・28 日、12 月 1 日のみであった。オイラーは以下の考察において主にメシエの観測データを用いているので、ここでメシエの全 28 個の観測データ及びオイラーがそれ以外に唯一使用したザノッティの 9 月 9 日の観測データを掲げておこう。

メシエによる 1769 年彗星の観測データ（抜粋)

パリ平均時(1769 年)	観測黄経	観測黄緯	備考
8 月 8 日 11h05'07"	35°24'35"	S 1°26'26"	7 月 31 日 降交点通過
8 日 14h35'06"	35°31'49"	1°28'58"	
14 日 12h34'13"	39°58'47"	3°09'37"	
15 日 15h41'12"	40°48'54"	3°29'29"	
16 日 12h01'44"	41°34'06"	3°47'17"	
20 日 15h21'22"	45°58'38"	5°28'36"	
21 日 13h04'55"	47°01'33"	5°53'46"	

22 日 12h29'26"	48°18'24"	6°26'25"	
23 日 12h17'01"	49°43'15"	6°58'19"	
25 日 12h05'56"	52°52'03"	8°12'52"	
26 日 15h54'14"	54°56'07"	9°00'22"	
27 日 12h10'40"	56°36'04"	9°38'53"	
28 日 13h24'17"	58°48'42"	10°32'44"	
30 日 12h26'48"	63°36'01"	12°17'37"	
9 月 2 日 12h43'16"	72°53'56"	15°28'04"	
3 日 13h35'55"	76°46'00"	16°39'47"	
4 日 13h36'36"	80°53'28"	17°49'22"	
5 日 14h23'07"	85°36'25"	19°00'38"	
8 日 14h42'50"	71°12'07"	22°03'47"	
9 日 14h32'19"	76°53'33"	22°50'30"	ザノッティによる観測
9 日 16h14'58"	107°37'29"	22°51'23"	
15 日 16h39'40"	140°39'17"	22°43'34"	**10 月 7 日** 近日点通過
10 月 24 日 06h04'41"	230°21'35"	N 17°19'00"	10 月 8 日 昇交点通過
27 日 06h00'00"	235°40'37"	18°44'51"	
11 月 4 日 05h39'01"	247°58'40"	21°13'55"	
20 日 05h43'44"	266°50'55"	23°12'17"	
27 日 06h22'42"	272°48'54"	23°24'53"	
28 日 05h37'54"	273°37'28"	23°26'48"	
12 月 1 日 05h38'22"	275°59'58"	23°28'38"	

ここで、オイラーは、次の「設問」を提示する。

設　問

「任意の時刻Tにおける彗星の位置をL（黄経又は黄緯）とする。時刻 $T-p$ における位置を $L-m$ とし、時刻 $T+q$ における位置を$L+n$ とする。このとき、時刻 $T+z$ における位置を求めよ。」

この設問について、オイラーは求める位置を

$$L+Mz(z+p)+Nz(z-q)$$

とおいた [11)]。このとき、M と N を $p,\ q,\ m,\ n$ で表すと、

$$M=\frac{n}{q(p+q)}\ ,\qquad N=-\frac{m}{p(p+q)}$$

となるので、求める位置は、M 、 N を既知として、

$$L+(Mp-Nq)z+(M+N)zz\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

と書くことができる [12)]。この式及び 9 月 3 日・4 日・5 日の観測データを使って、オイラーは、9 月 3 日 13 時 36 分 36 秒における彗星の位置及びその 24 時間後と 48 時間後の位置を次のように算出した [13)]。

		黄経	黄緯（南緯）
Ⅰ.	9 月 3 日 13h 36' 36"	76° 46' 07"	16° 39' 48"
Ⅱ.	9 月 4 日 13h 36' 36"	80° 53' 28"	17° 49' 22"
Ⅲ.	9 月 5 日 13h 36' 36"	85° 27' 08"	18° 58' 25"

以後、種々の場面でこの数字が用いられることになる。

(2)「第 1 部 放物線の仮定の下でのこの彗星の運動について　第 1 章　9 月 3 日・4 日・5 日の観測を満足させる放物線軌道の検討（第 9 節～第 24 節。13 頁～35 頁）」

この第 1 部第 1 章では、序部で得た 9 月 3 日・4 日・5 日の所定時刻における黄経・黄緯を基にして、これら 3 つの時刻における彗星の位置を決定する方法を示している[14)]。この場合、1 番目と 3 番目の観測時刻の差は 48 時間しかないので、その間、彗星は直線運動をするという近似が用いられている。また、2 番目の観測時刻は 1 番目と 3 番目の観測時刻のちょうど真中にあるが、これはニュートンの計算方法における前提と同じである。

(3)「第 1 部 第 2 章　8 月 21 日・22 日の 2 個の観測を満足させるすべての放物線の検討（第 25 節～第 41 節。35 頁～54 頁）」

第 1 部第 2 章では、8 月 21 日・22 日の 2 個の観測に基づいて、近日点通過時刻の算定を試みる。2 個の観測だけでは放物線を決定できないので、もう 1 つの値を仮定する。すなわち、8 月 21 日の観測時刻における地球の位置と太陽とを結ぶ直線がその時刻における彗星の位置から黄道面に下した垂線の足と太陽を結ぶ直線となす角度をGとし、観測の諸データ（第 1 章の結果を含む）からこの角度Gに近い値として、①28°30'、②29°30'、③30°00' の 3 通りを仮定する。そして、この 3 通りのそれぞれについて軌道要素の計算を行う。種々の計算の結果、本章の最後に、近日点通過時刻として、①の場合は 10 月 4 日 17 時 48 分、②の場合は 10 月 8 日 14 時 58 分、③の場合は 10 月 11 日 4 時 46 分という結果が得られた。すなわち、角度Gに 30'の差異があると、近日点通過時刻は 3～4 日程度変化することが示された。

(4)「第 1 部 第 3 章　前章の放物線の中から他の観測をも満足させるものを求める（第 42 節～第 50 節。54 頁～71 頁）」

第 1 部第 3 章では、第 2 章で得られた軌道要素を 8 月 8 日及び 9 月 4 日の観測に当てはめるとどのような結果になるかを検証する。その際、第 2 章の③の仮定は乖離が大きいことがすぐに分かるので不要だとして、①と②の仮定についてそれぞれ計算を行っている。その結果、8 月 8 日の観測については、黄経から求めた角度Gの値と黄緯から求めた角度Gの値が 21'49" も異なるので、放物線軌道という前提は否定されるかもしれないと述べる。他方、9 月 4 日の観測について

は、同様の角度Gの差異は 14'32" にとどまるので、これなら許容範囲内だろうとの見解を示している。

(5)「第2部 彗星の真の運動について　第1章 任意の2個の観測を満足するすべての円錐曲線を求める方法（第51節～第66節。72頁～85頁）」
第2部第1章では、彗星の軌道が放物線、楕円、双曲線のいずれかでもよいとした上で、2個の観測のほかに、2個の観測時における彗星の日心経度も分かったいう仮定の下で検討する。まず、降交点黄経や軌道傾斜角を求め、次いで2個の観測時における彗星の位置と太陽とが形作る扇形の面積を求めることを通じて近日点の経度を計算し、最後に2番目の観測時刻から近日点通過時刻までの所要時間を求める公式を提示する。

(6)「第2部 第2章 8月21日と9月4日の2個の観測を満足させるすべての円錐曲線の検討（第67節～第77節。85頁～99頁）」
第2部第2章では、8月21日と9月4日の2個の観測を取り上げ、これまでの検討結果に基づいて、両者における彗星の日心経度をそれぞれ

$$359°42' - x \quad 及び \qquad 3°06' - y$$

とおく。ここでx とy が余り大きいことは許されないのでどちらも20'以内に制限することにする。そして、実際の数値計算のためには、

① $x = 0'$ かつ $y = 0'$,　　② $x = 20'$ かつ $y = 0'$,
③ $x = 0'$ かつ $y = 20'$

の3通りを仮定して計算を行う。そして前章で展開した計算方法に従って計算し、補正項の係数は①～③の結果から比例配分し、結局、次の軌道要素を得る。

Ⅰ 昇交点黄経・・・・$175°20' - \frac{34 \cdot x'}{20} + \frac{12 \cdot y'}{20}$

Ⅱ 軌道傾斜角・・・・$41°52' - \frac{131 \cdot x'}{20} + \frac{108 \cdot y'}{20}$

Ⅲ 半パラメータ[15]・・$0.232130 + 0.001193 \cdot x - 0.001460 \cdot y$

Ⅳ 軌道の離心率・・・$1.00227 - 0.000348 \cdot x - 0.000103 \cdot y$

Ⅴ 近日点から昇交点までの日心角度・・・$30°10' + \frac{70 \cdot x'}{20} - \frac{134 \cdot y'}{20}$

Ⅵ 近日点距離・・・・$0.11593 + 0.000618 \cdot x - 0.000726 \cdot y$

Ⅶ 近日点通過時刻・・10月7日5時6分 $+ \frac{1082 \cdot x}{20}$ 分 $- \frac{743 \cdot y}{20}$ 分

この結果から、「$y = 0$ なら$x = 14$、$y = 20$ なら$x = 8$、$x = \mathrm{y}$ とおくなら$x = \mathrm{y} = 14$」という一応の結論が示される。

(7)「第2部 第3章 前章で求めた円錐曲線の中から10月24日の観測を満足させるものを決定する（第78節～第85節。100頁～108頁）」
第2部 第3章では、前章までに得た諸式に従い、8月21日と9月4日の観測

に基づいて、10 月 24 日の観測時刻における（A)「太陽と彗星の距離」及び（B)「近日点通過時刻」を算出する。その際、前章における①、②、③の 3 通りの仮定をそのまま用いて補正項の係数も計算する。その結果を 10 月 24 日の実際の観測データと照合することにより、(A)についてxとyの 1 次式が得られ、(B)についてもxとyの 1 次式が得られるので、この連立方程式を解いて、$x = 8'20''$、$y = -2'30''$ という補正項の解を得る。これを前章で得た軌道要素に代入すれば、一応の最終結果である軌道要素が得られる。しかし、オイラーは、これは余り精度は高くなく、もっと正確な値が得られる方法が必要だとして、それを次の第 3 部で検討すると述べる。

(8)「第 3 部 彗星の軌道を正確に決定するより確実でより一般的な方法　　第 1 章　この方法の一般的な説明（第 87 節～第 97 節。109 頁～117 頁）」[16)]

第 3 部第 1 章では、まず、前章で得た降交点黄経 = 355° 05' 及び軌道傾斜角 = 40° 44' という値は種々の数値と比較すると過小であるとして、

(A) 降交点黄経 = 355° 10' $-x$

(B) 軌道傾斜角 = 41° 00' − 2y

という計算式を提示する。そして、このx とy を最終的に求めることを念頭に置き、そのために次の 3 通りの仮定を設ける。

① $x = 0'$ かつ $y = 0'$, ② $x = 10'$ かつ $y = 0'$, ③$x = 0'$ かつ $y = 10'$

次に、3 個の観測に基づいて近日点通過時刻を算出するために必要な諸公式を求める。その導出には多少長い計算を要するが、各観測時刻における彗星と太陽との距離、各種の角度、離心率、半パラメータ等を順次求めることにより、最終的に必要な諸公式が得られる。

(9)「第 3 部 第 2 章 8 月 8 日、9 月 9 日及び 10 月 24 日の観測に対する前章の方法の適用（第 98 節～第 107 節。117 頁～134 頁）」

第 3 部第 2 章では、前章の検討を踏まえ、8 月 8 日、9 月 9 日及び 10 月 24 日の観測データを使用して具体的な計算を行う。上記の①～③のそれぞれの場合について数値計算を行い、次のような式を得る。

半パラメータ = $0.2428774 - 0.0003016 \cdot x + 0.0007375 \cdot y$

太陽から近日点と降交点を見込む角 = 149°26'19" $- 50.2 \cdot x - 126.6 \cdot y$

近日点距離 = $0.1216109 - 0.0001695 \cdot x + 0.0003788y$

さらに、近日点通過時刻については、3 個の観測のそれぞれの値に基づいて、次の諸式が示される。

（Ⅰ）近日点通過時刻（8 月 8 日の観測に基づく）

= 10 月 7.86681 日 $- 0.07814 \cdot x + 0.03816 \cdot y$

（Ⅱ）近日点通過時刻（9 月 9 日の観測に基づく）

= 10 月 7.64318 日 $- 0.01277 \cdot x + 0.01450 \cdot y$

（Ⅲ）近日点通過時刻（10 月 24 日の観測に基づく）

$$= 10月\ 7.83825日 + 0.00746・x - 0.04339・y$$

(10)「第 3 部 第 3 章 この彗星の真の軌道の決定（第 108 節～第 111 節。134 頁～138 頁）」

第 3 部第 3 章では、まず、近日点通過時刻を表す前章の(Ⅰ)～(Ⅲ)の式を使ってxとy を決定することを考える。すなわち、(Ⅰ)～(Ⅲ)はいずれも同じ量を表しているのだから、(Ⅲ) －（Ⅰ) = (Ⅲ) －（Ⅱ) = 0 が成り立つ。よって次を得る。

$$-0.02856 + 0.08560・x - 0.08155・y = 0$$

$$-0.19507 + 0.02023・x - 0.05789・y = 0$$

これを解いて、

$$x = 5.3121,\ y = 5.226$$

となる。この値を(8)の(A)と(B)に代入し、また前章等で得た、諸軌道要素を表す諸式を使うと、次の結果が得られる。

Ⅰ 降交点黄経・・・・・・・・・・・・・355° 04' 41"
Ⅱ 軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・40° 49' 33"
Ⅲ 半パラメータ・・・・・・・・・・・・0.2451294
Ⅳ 離心率・・・・・・・・・・・・・・・0.9980036
Ⅴ 近日点から太陽までの距離・・・・・0.1226851 AU
Ⅵ 近日点から降交点までの日心角度・・149° 10' 51"
Ⅶ 近日点通過時刻（パリ平均時)・・・ 10 月 7 日 15 時 37 分 37 秒
（ = 10 月 7.65112 日）

これを見ると、離心率が 1 未満なので、この彗星の軌道は楕円であることが分かり、また、

長半径・・・・61.45318 AU
周期・・・・・481.7 年

が得られる。

(11)「第 3 部 第 4 章 観測する際の誤差に関連する彗星の軌道の正確さの程度について（第 112 節～第 124 節。138 頁～148 頁)」

第 3 部第 4 章では、前章までに得られた彗星の軌道要素がどの程度信頼できるかを検討する。そもそもそれぞれの観測はある程度の誤差を伴うものであるから、それが各軌道要素にどの程度の影響を与えるのか見積もる必要がある。その結果、例えば、離心率が 1 を超える可能性があるならば、軌道は楕円でなく双曲線になるかも知れないわけである。

オイラーは、観測の誤差には、①緯度の誤差、②経度の誤差、③観測時刻の誤差、の 3 種類があるという。しかし、①と②の誤差を考慮すると、それまでの軌道計算を最初からやり直さなければならなくなるので、それは避けて、③の誤差のみを考慮したいとする。そして、観測時刻の誤差による彗星の位置の誤差は 1' を超えないという仮定をおく。そして、その観測時における彗星の平均日々運動を n 分とすると、位置 1 分の誤差は観測時刻で言えば$1/n$日の誤差に相当し、観

測において位置にα分の誤差があれば、時刻についてはα/n日の補正を要することになる。

a) さて、前章までの計算の正確さを吟味するため、平均日々運動を 8 月 8 日については 50'、9 月 9 日については 348'、10 月 24 日については 105' とし、観測時刻の誤差による彗星の位置の誤差を 8 月 8 日についてはα分、9 月 9 日についてはβ分、10 月 24 日についてはγ分とする。そうすると、観測時刻の補正として、8 月 8 日についてはα/50 日、9 月 9 日についてはβ/348 日、10 月 24 日についてはγ/105 日を加える必要がある。そうすると、(9)の(Ⅰ)～(Ⅲ)は次のように修正される。

(Ⅰ') 近日点通過時刻（8 月 8 日の観測による）

= 10 月 7.86681 日 $-0.07814 \cdot x + 0.03816 \cdot y + \frac{\alpha}{50}$

(Ⅱ') 近日点通過時刻（9 月 9 日の観測による）

= 10 月 7.64318 日 $-0.01277 \cdot x + 0.01450 \cdot y + \frac{\beta}{348}$

(Ⅲ') 近日点通過時刻（10 月 24 日の観測による）

= 10 月 7.83825 日 $+0.00746 \cdot x - 0.04339 \cdot y + \frac{\gamma}{105}$

これより、(10)と同様の計算をして、xとy をα、β、γで表すと、次のようになる。

(C) $x = 5.312 + 0.350 \cdot \alpha - 0.071 \cdot \beta + 0.068 \cdot \gamma$

(D) $y = 5.226 + 0.122 \cdot \alpha - 0.074 \cdot \beta + 0.188 \cdot \gamma$

上記(8)で述べたように、x は降交点黄経の観測誤差、y は軌道傾斜角の誤差の半分を表す。この xとy の値を(Ⅰ')～(Ⅲ')のいずれかに代入すると、

近日点通過時刻

= 10 月 7.65112 日 $-0.00269 \cdot \alpha + 0.00269 \cdot \beta + 0.00186 \cdot \gamma$

となる。ここで、実際の観測の精度を勘案して、誤差α、β、γはいずれも±1' を超えないものと仮定する。すると、この近日点通過時刻の値は$\alpha = -1$、$\beta = +1$、$\gamma = +1$ のときに最大値を取るが、その際の補正量は+ 0.00724 日すなわち 10 分 25 秒（時間）に過ぎない。仮に或る観測時刻における彗星の位置の特定について 5'（角度）もの誤差が生じたとしても、それが近日点通過時刻に及ぼす影響は、その 5 倍すなわち 1 時間未満に過ぎない。

b) 次に、降交点黄経の誤差を考える。降交点黄経は、第 3 部第 1 章で

(E) 降交点黄経 $= 355°10' - x$

と計算されたが、その後、この x は、第 3 部第 3 章第 108 節で 5'.3121 と求められたので、上記(10)で見たように、

降交点黄経 = 355° 04' 41"

となっていた。しかし、本章では、その x をさらに精密化するため、α、β、γを用いて上記(C) のように表したので、それを(E) に代入すると、

降交点黄経 $= 355° 04' 41'' - 0.350 \cdot \alpha + 0.071 \cdot \beta - 0.068 \cdot \gamma$
となる。これを見ると、右辺第 2 項以下の修正量は合わせて最大 0'.489 すなわち 29" しかない。もしα、β、γ の各誤差が±5' まで広がる場合を想定したとしても、その影響は 2'.5 程度にとどまる。

c) 次に、軌道傾斜角の誤差を考える。軌道傾斜角は、第 3 部第 1 章で

(F) 軌道傾斜角$= 41°00' - 2 \cdot y$

と計算されたが、その後、この y は、第 3 部第 3 章第 108 節で 5'.226 と求められたので、上記(10)で見たように、

軌道傾斜角 = 40° 49' 33"

となっていた。しかし、本章では、そのy をさらに精密化するため、α、β、γを用いて上記(D) のように表したので、それを(F) に代入すると、

軌道傾斜角$= 40°49'33'' - 0.244 \cdot \alpha + 0.148 \cdot \beta - 0.376 \cdot \gamma$

となる。これを見ると、右辺第 2 項以下の修正量は合わせても最大 0'.768 すなわち 46" しかない。そして、もしα、β、γの各誤差が±5' まで広がる場合を想定したとしても、その影響は 6' 程度にとどまる。

d) 次に、半パラメータ b と離心率 e の誤差を考えよう。半パラメータ b については、(9) で見たように、第 3 部第 2 章で

$$b = 0.2428774 - 0.0003016 \cdot x + 0.0007375 \cdot y$$

と表されていたので、右辺の x と y に(C)と(D)を代入すると、次式を得る。

(G) $b = 0.2451294 - 0.000015 \cdot \alpha - 0.000033 \cdot \beta + 0.000106 \cdot \gamma$

また、近日点距離 q については

$$q = 0.1216109 - 0.0001695 \cdot x + 0.0003788 \cdot y$$

という式が第 3 部第 2 章で得られており、また、離心率 $e = \frac{b}{q} - 1$ なので、これらの式と(C)と(D)を合わせると、離心率 e については、

(H) $e = 0.9980036 + 0.999989 \cdot \alpha - 0.000011 \cdot \beta - 0.000008 \cdot \gamma$

を得る。これを見ると、α、β、γの誤差がいずれも 1'以内ならば、離心率の誤差は 0.000098 以下である。もし、α、β、γの誤差を 5' まで許容しても、離心率は 0.000490 以下しか変化しないので、これを加えても離心率は 0.9984936 にとどまる。これより明らかなように、この彗星の軌道が放物線となるためには、3 回の観測においてそれぞれ 20' もの誤差が（離心率を増加させる方に正又は負の符号で）存在しなければならない。それはほとんど不可能と考えてよい。

e) 次に、長半径 a については、

$$a = \frac{b}{1-e^2}$$

によって計算するが、この場合、明らかにbの増減よりもeの増減の方がaの増減を大きく左右するので、a は、$\alpha = +1$、$\beta = -1$、$\gamma = -1$ のとき最大になり、$\alpha = -1$、$\beta = +1$、$\gamma = +1$ のとき最小になる。(G)、(H) にこれらの値を

代入して計算すると、

$$58.603 \leqq a \leqq 64.600$$

となる。また、周期は$a\sqrt{a}$だから、

$$448.6 \leqq \text{周期} \leqq 519.2 \quad (\text{年})$$

となる。すなわち、各観測の誤差の範囲を 1' とすると、この彗星の周期は 519 年と 449 年の間にあることになる。

f) 最後に、太陽から近日点と降交点を見込む角については、(9)で見たように、

$$149°26'\,19'' - 50.2\cdot x - 126.6\cdot y$$

で表されるが、これに(C)、(D) を代入すると、

太陽から近日点と降交点を見込む角

$$= 149°10'51'' - 32''.5\cdot\alpha + 12''.9\cdot\beta - 27''.3\cdot\gamma$$

となる（α、β、γの単位は '）。すなわち、観測誤差が 1' を超えなければ、この角の誤差も 1'を超えない。

g) 以上をまとめると、観測誤差が 1' を大きく超えない場合には、本章で得られた軌道要素は概ね信頼できる正確さを有している。但し、周期は別であり、周期の正確さは高くない。

(12)「第 3 部 第 5 章 軌道要素を見出した後にその彗星の位置を計算する方法（第 125 節～第 136 節。148 頁～159 頁）」

a) 第 3 部第 5 章では、軌道要素が分かったことを前提として、与えられた時刻における彗星の位置（地心経度と地心緯度）を算出する方法を検討する。彗星の軌道が放物線の場合については既に見たが、楕円の場合には、或る近点角（真近点角を指す。以下同じ。）が指定された場合に、彗星がそれによって定まる位置と近日点との間を移動するのに要する時間を求める公式を検討する。この計算を多数行えば、或る時刻が与えられた場合に、その時刻における近点角が分かることになる。

近点角によって指定された位置と近日点との間を彗星が移動するのに要する時間の公式は、第 3 部第 1 章の第 97 節で示されている。もっとも、この公式は近点角が 180° に近づいたとき、すなわち遠日点の近くでは不正確となって使えないことに注意する必要がある。

この公式を使って、降交点から近日点までの移動に要する時間 N(日)を求めると、降交点の近点角を 149°10'57" として、68.11175 日すなわち 68 日 2 時間 40 分 55 秒が得られる。これを近日点通過時刻の 10 月 7 日 15 時 37 分 37 秒から差し引くと、降交点通過時刻は 7 月 31 日 12 時 56 分 42 秒となる。また、この計算の過程で、降交点と太陽の間の距離は 1.7152663 であることが分かる。

b) 次に、近日点から昇交点までの移動に要する時間を求めよう。この場合の近点角は 30°49'03" であり、公式にしたがって計算すると、N= 0.99874(日) = 23 時間 58 分 11 秒 となるので、これを近日点通過時刻に加算して、昇交点通過時刻は 10 月 8 日 15 時 35 分 48 秒 となる。なお、この計算の過程で、昇交点と太陽の間の距離は 0.1319972 であることが分かる。

c) また、近点角を 140°06' とした場合に、その位置から近日点まで移動するのに要する時間を同じ方法で求めると、N= 34.10070(日) = 34 日 2 時間 25 分 01 秒 となる。したがって、この時間を近日点通過時刻から差し引くと、その近点角の位置を通過した時刻は 9 月 3 日 13 時 12 分 36 秒 となる。また、そのときの太陽との距離は 1.045903 と算出される。

さらに、この近点角のときの彗星の日心経度と日心緯度を求めると、簡単な計算により、前者は 1°58'32"、後者は南緯 5°55'25" が得られる。

最後に、この 9 月 3 日 13 時 12 分 36 秒における彗星の地心経度と地心緯度を計算しよう。この時刻における太陽の地心経度は 161°41'55" であり、地球との距離は 1.007474 AU である。これを使って計算すると、求める地心経度は 76°42'31" で、地心緯度は南緯 16°36'24" となる。また、このときの彗星と地球の距離は、0.37768 AU と算定される。

d) 以上の結果を実際の観測値と比較しよう。9 月 3 日 13 時 12 分 36 秒に近い観測として、パリにおけるメシエの 9 月 3 日 13 時 35 分 55 秒 の観測を取り上げると、地心経度は 76°46'00" で、地心緯度は南緯 16°39'47" となっている。両者の時間差が 23 分 19 秒あるので、これをその時点の平均日々運動量（経度につき 3°51'43"、緯度につき 1°11'07" ）で割って経度・緯度に換算して補正すると、地心経度の誤差は 16"、地心緯度の誤差は 2'28" となる。観測時の誤差や近似計算に伴う誤差等が存在するので、これ以上精度の高い計算を期待するのはなかなか難しいと思われる。

より正確な軌道を求めたい場合には、最初に選ぶ 3 個の観測をいろいろ取り換えて計算してみるのがよい。

e) 最後に、近点角Φが 180°に近い場合の計算方法について説明しておこう。

$$\Delta = \frac{(1-e)}{(1+e)}\,, \quad \varepsilon = \sqrt{\Delta}\,, \quad \tan\frac{1}{2}\Psi = \varepsilon\tan\frac{1}{2}\Phi$$

とすると、彗星が近日点から近点角Φの位置まで移動するのに要する日数 N は、次式で求められる。

$$N = a\sqrt{a}(\Psi - e\sin\Psi)$$

例えば、$\Phi =$ 175° とすると、N= 8545.8 日 = 23 年 151 日となる。

以上でオイラーの 1770 年書の記述が終了する。

3. オイラーの軌道計算法の評価

以上見てきたオイラーの軌道計算法に関しては、次の諸点を指摘できよう。

①大きな基本方針として、まず昇交点（又は降交点）黄経と軌道傾斜角を決める[17)]。

②各軌道要素の算定に当たっては、補正量を表す x と y を使って 1 次式による近似を行い、未定係数法によって求める値を計算する場合が多い[18)]。

③算出された昇交点黄経・軌道傾斜角・近日点経度の誤差は、2～3 分以内に収まると考えられ、精度はかなり高いと評価できるが、楕円軌道の場合の周期の誤差

は相当大きく高い精度は期待できない[19]。
④この計算法は、オイラー自身が 1744 年の著書で示したものと比較すると、相違点もあるが[20]、連立方程式を立てて解く等、似た点も多い[21]。
⑤この計算法は、18 世紀の他の天文学者の軌道計算法とはかなり異なり、オイラー独特のものと言える[22]。
⑥この計算法はレクセルに受け継がれるが、それ以外に模倣する者は現れず、後世の軌道決定論に与えた影響は大きくない[23]。

第2章　レクセル彗星の発見

1770年6月14日の深夜にメシエは彗星を発見した[24)]。この彗星はその後、明るさを増しながら7月上旬まで観測された。7月1日には地球の極めて近くを通過したことが分かっている。7月2日頃には、一晩で40数度移動したという観測記録も残されている。その後しばらくは太陽の方向にあったため観測できなかったが、8月3日頃から再び観測されるようになった。9月に入ると、明るさはどんどん減少し、10月3日が最後の観測日となった。

多くの天文学者がこの彗星の軌道の計算を試みた。当初は放物線軌道が算定されていたが、1776年になってレクセルが周期5年余の楕円軌道を主張した。この楕円軌道という主張は詳細な計算に基づくものであり、アレクサンドル・パングレ(Alexandre Guy Pingré, 1711-1796)らの賛同を得て、次第に有力な見解となった[25)]。

周期が5年余ならば、その後何度も観測のチャンスがあったはずである。しかし、次に回帰したと思われる1775年～1776年にはまだレクセルの楕円軌道の計算は公表されておらず、また、地球から見て太陽の後方を通った可能性もあったので、発見されなかったとしても不思議はない。その後、この彗星は1779年に木星に大接近した模様で、軌道が大きく変わり、行方不明になった。すなわち、この彗星は1770年にたった1回だけ観測された彗星ということになる。したがって、この彗星の周期を観測によって確認することはできず、もっぱら理論的な軌道計算によって周期を算出するほかはない。このような事情を踏まえて、第3章ではレクセルがいかにしてこの彗星の軌道を計算したのかを紹介し、それを踏まえて第4章で彼の軌道計算の評価を行うことにする。

第 3 章　レクセルによる彗星の軌道計算について

1. レクセルの経歴

アンダース・レクセル(Anders Johan Lexell, 1740-1784)は、1740 年 12 月 24 日にオーボ（当時はスウェーデン領、現在はフィンランドの一部）に生まれたスウェーデン人の数学者・天文学者である。1760 年にオーボ大学で哲学博士の学位を得た後、1763 年にウプサラ大学の数学の講師となり、1766 年にウプサラ航海学校の数学の教授となった。1768 年にはオイラーの推薦を得て、ロシアに移りロシア科学アカデミー（当時の正式名称は「帝国サンクトペテルブルク科学アカデミー」)の副手を務めた。オイラーの指導を受けつつ、視力を失った晩年のオイラーの研究・執筆を助けた。1783 年にオイラーが亡くなると、翌年に彼も世を去った。

2. 1770 年彗星に関するレクセルの論稿

レクセルは、1770 年代に帝国サンクトペテルブルク科学アカデミーの紀要（以下「科学院紀要」 という）に数学や天文学に関する論文を多数発表した。そして、1770 年彗星については、数年間の研究を経た後、1777 年頃から 1779 年頃にかけて数個の論稿を執筆した。科学院紀要に掲載されたレクセルの 1770 年彗星関連の論稿は次の通りである。

①「彗星が運動する軌道の昇交点の位置と軌道傾斜角を既知とみなせる場合に、彗星の地心位置が与えられて日心位置を求める天文学問題の解決」科学院紀要 1777 年版第 1 部所収(1778 年刊行。ラテン語で執筆)[26)]

②「彗星の周期についての、そして特に 1770 年に観測された彗星の回帰時刻についての、天文学上の試み」科学院紀要 1777 年版第 1 部所収(1778 年刊行。ラテン語で執筆) [27)]

③「1770 年彗星が次に近日点に回帰した際に地球から見えるであろう天空上の位置の推定」科学院紀要 1777 年版第 2 部所収(1780 年刊行。ラテン語で執筆) [28)]

④「1770 年に観察された彗星の周期に関する更なる考察」科学院紀要 1778 年版第 1 部所収(1780 年刊行。ラテン語で執筆) [29)]

⑤「彗星の周期全般について、そして特に 1770 年に観測された彗星の周期について」科学院紀要 1778 年版第 2 部所収(1781 年刊行。フランス語で執筆) [30)]

その他、レクセルが他の天文学者に書簡として送付しそれが雑誌に掲載された論稿として、次のものがある。

⑥ラランド「1770 年の彗星の回帰に関する書簡」(1778 年刊行。フランス語で紹介) [31)]

⑦メシエ「1770 年 6 月 14 日から 10 月 3 日までパリにおいて海軍天文台とルイ大王学院によってなされた 11 番目の彗星の観測を含む論文」 (1779 年刊行。フランス語で掲載) [32)]

また、レクセル自身の著書として刊行された次の論稿がある。

⑧『彗星の周期全般について、そして特に 1770 年に観測された彗星の周期につ

いて』(1779 年前後に刊行。フランス語で執筆) 33)

以上の諸論稿の相互関係や時間的前後はやや複雑だが、内容に従って概ね次のように整理できる。
(1) 1770 年彗星の軌道要素についてみると、レクセルが最初に算定した第 1 次軌道要素に基づく論稿もあれば、彼が後に改良した第 2 次軌道要素に基づく論稿もある。①、②、③、⑥は前者の例であり、いずれも概ね 1777 年末頃までに執筆されている。また、④、⑤、⑦、⑧は後者の例であり、いずれも 1778 年以降に執筆されている。
(2) ①は、彗星の昇交点黄経と軌道傾斜角が分かっている場合に、地心位置が与えられて日心位置を求める方法を考察しており、②以下の前提とも言うべき基礎的な論稿である。
(3) ②は、1770 年彗星の第 1 次軌道要素を算出し提示した論稿である。②は、この彗星が楕円軌道を描く短周期彗星であることを指摘し、その公転周期はわずか約 5.5 年であると主張した画期的な論稿と言える。
(4) ③は、②の続編ないし補論ともいうべき論稿で、第 1 次軌道要素を前提とした上で、1770 年彗星が 1781 年に回帰した場合にどの方向に見えるか等について予測計算を行っている。
(5) ⑥は、ジェローム・ラランド(Joseph-Jérôme Lefrançois de Lalande, 1732–1807)が、レクセルからの書簡を簡潔に要約してその結論（すなわちレクセルの算定した第 1 次軌道要素）を世に紹介したもので、内容的には②に相当する。③は含まれていない。
(6) ④は、1770 年彗星の周期等についてさらに詳細な検討を加え、より精確な第 2 次軌道要素を算定・提示した論稿である。レクセルが第 2 次軌道要素を示した最初の論稿と考えられるが、刊行が 1780 年と遅れたこともあって、余り世間の注目を浴びなかったようである。
(7) ⑤は、1778 年 10 月 13 日にペテルスブルク科学アカデミーの総会で行った講演を収録したもので、軌道要素については④で示した第 2 次軌道要素を踏襲している。会員向けの講演であることを考慮して、数式は用いず、また彗星に関する一般的な話題等を盛り込んでいる。
(8) ⑦は、1770 年彗星の発見者であるメシエが、1778 年 11 月にレクセルから受け取ったラテン語の論稿（④を多少修正した論稿と思われる）をフランス語に訳出し、自己の論文の中で紹介したものである。レクセルが第 2 次軌道要素に基づいて 5.585 年という周期を決定するまでの過程を詳細にかつ説得力を持って説明している。⑦は、その元となった④よりも早く刊行され、また紹介者のメシエも掲載雑誌も著名だった。この⑦により、レクセルの計算結果は広く世に知られ、受け入れられることになったと言えよう。
(9) ⑧は、⑤に収録された講演を再録するとともに、④や⑦で述べた周期計算方法の説明を加えて、単行本の形にしたものである。頁数は 36 頁と少な目で、1770 年彗星について解説する小冊子のような体裁となっている。刊行年は不詳で、④や⑦との刊行の前後は不明である。

3. レクセルの軌道計算について

前述の諸論稿を踏まえて、以下、1770 年彗星に関するレクセルの軌道計算を紹介する。

(1) 軌道要素の算定方法について

レクセルによる彗星の軌道計算についてまず注目されるのは、論稿①である。論稿①は、彗星の軌道要素のうち、昇交点黄経と軌道傾斜角が既知になったと仮定し、さらにその地心位置（地心黄経・地心黄緯）が与えられた場合に、彗星の日心位置（日心黄経・日心黄緯・太陽から彗星までの距離）を求める計算法を示している。この問題はオイラーの 1770 年書にも登場するが、レクセルはより簡明な計算法を述べている。この計算ができるようになれば、各観測時刻における彗星の日心黄経、日心黄緯及び太陽までの距離が容易に算定できるので、近日点経度、近日点距離及び近日点通過時刻の算定が容易になる。

論稿①は、軌道計算についてそれ以上のことを述べていないが、科学院紀要の同じ巻に引き続いて掲載された論稿②において、レクセルは、自分の算定した 1770 年彗星の軌道要素(第 1 次)を示した。その内容は次の通りである。

昇交点黄経・・・・・・・・・・・132°20'
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・1°34'30"
半パラメータの対数・・・・・・0.0808000
近日点距離の対数・・・・・・・9.8296000 [34]
離心率の対数・・・・・・・・・・9.8938725
降交点から近日点までの角度・・43°59'40"
近日点通過時刻・・・・・・・・・1770 年 8 月 13.6950 日
公転周期・・・・・・・・・・・・5.4992 年

論稿②では多くの観測の中から 3 個ずつ選んで計 20 の組を作り、その各々について軌道要素を計算するが、その際の具体的な計算方法は特に示されていない。その計算方法は既にオイラーの 1770 年書等で明らかにされているから敢えて書くまでもないと考えたのであろう。そして、20 の組についてそれぞれ求めた軌道要素を適宜参照しながらできるだけ正確な軌道要素を探索して、上記の数値を得た。その過程は、むしろ論稿⑥によく現れているので、以下に論稿⑥の概要を紹介しよう。

(2)ラランドによるレクセルの軌道計算の紹介

1770 年彗星の軌道要素の計算に成功してその周期は 5 年半程度であるとの確信を得たレクセルは、科学院紀要への執筆とは別に、自分の軌道計算の結果をラランドに知らせた。ラランドは、その内容を雑誌に投稿して紹介した [35]。その概略は次の通りである。

【論稿⑥の概略】

《 メシエ氏が 1770 年 6 月 15 日から 10 月までパリで観測した彗星について、レクセル氏は単一の放物線でその軌道を説明しようとしたが、すぐにそれは不可能であることが分かった。そこでレクセル氏は、軌道計算のために [36]3 個ずつの観測を 20 組作った。初めの 10 組は前期の出現 [37]から 1 個の観測と後期の出現から 2 個の観測を取り、残りの 10 組は 3 個の観測共後期の出現から取った。彼は、まず昇交点黄経と軌道傾斜角を決めた。すなわち、昇交点黄経については、前者の 10 組から 131°42'ないし 132°54'が得られ、後者の 10 組からは 132°06'ないし 132°42'が得られた。また、軌道傾斜角については前者の 10 組から 1°33'20"ないし 1°35'10"が得られ、後者の 10 組からは 1°33'40"ないし 1°36'40"が得られた。それ故、彼は昇交点黄経を 132°20'と仮定しても誤差は 10'以内に収まるだろうと考えた。またこの誤差は公転周期にさほど大きな影響を与えないだろうと考えた。

昇交点黄経が得られると、昇交点と降交点を結ぶ直線上を地球が通過したときすなわち 1770 年 8 月 3 日・4 日の観測から、軌道傾斜角を容易に求めることができる。こうしてレクセルは、軌道傾斜角は 1°33'53"から 1°35'10"の間にあるとして、1°34'30"と仮定した。またその場合の誤差は 20"を超えないだろうと考えた。

この 2 つの軌道要素が分かると、他の軌道要素を決定するためには 2 個の観測で足りる。

第 1 に、近日点距離の仮定を目指す。まず、6 月 15 日と 10 月 1 日のように大きく離れた日時の観測を選んで、半パラメータを求める。20 組の観測から、レクセルは半パラメータの対数を 0.0809000 と算定した。

次に、2 個の観測のうち 1 個は近日点に近く、他は遠く離れた観測データを選ぶ。離心率として適当な値を取って、近日点距離を求める。20 組の観測から近日点距離の対数は 9.828 と 9.831 の間にあることが確かになった。

それ故、彼は、半パラメータの対数は 0.081、近日点距離の対数は 9.830 と仮定した。しかし、すぐに分かったのだが、この軌道要素では後期の観測を十分うまく説明できず、また 6 月の観測も適合度が低かった。そして半パラメータの対数を 0.0808 に変えると、8 月 7 日以降の誤差が非常に大きくて 3 分にもなり、しかもすべて負だった。そこで近日点距離の対数を減らして 9.8296 と仮定すると、誤差はずっと現実的になった。すなわち、8 月 2 日から 10 月 2 日までの誤差は、ほとんど 2 分を超えなかった。また、6 月における誤差は 2 分と 7 分の間に収まった。6 月 30 日、7 月 1 日及び 7 月 3 日の誤差が 5 度近くなったのは事実だ。しかし、レクセル氏は、どのような軌道要素の組み合わせでもこれらを満足させることはできないと確信している。彼は、この彗星は地球の作用によって何らかの変動を生じ、その結果、前期と後期の間に、軌道要素が変わったに違いないとの結論を下した。降交点から近日点までの距離を 40 秒か 50 秒だけ減らせ

ば、6 月 15 日から 6 月 28 日までの前期の観測を後期の観測と良く調和させることは容易にできる。
また彼が保証するところによれば、近日点経度と降交点黄経に小さな修正を加え、かつ近日点距離を少々減らせば、後期における計算誤差をなお相当減少させることができるとのことである。そして、2~3 の疑わしい観測を除外すれば、おそらくその修正は 1 分を超えないだろうと彼は言う。
レクセル氏は、5 年半毎に回帰する彗星がどうしてこれまで一度しか目撃されなかったのかという誰もが抱く異論を隠しはしない。
「私にはこの困難を解決することができない。もし誰かがその困難は私の計算を覆すに足りるほど強力だと考えたとしても、私は怒ったりしないだろう。私はこの結果を出したことで満足しており、今後の事実がその正しさを証明するだろう。」
しかし、レクセル氏の計算は主として 9 月 29 日と 10 月 2 日の観測に基づいているので、残りの 8 月 2 日から 9 月 20 日までの観測について、離心率がもっと大きい楕円によって満足させられないのか吟味する価値があろう。レクセル氏の考えによれば、離心率を増大させたとしても、周期が 10 年を超えることはなく、また、その結果は現実的なものにならないと信ずべき理由があるとのことである。
もし、この計算がもっとはやく完了していたならば、おそらく 1781 年を待つことなくこの彗星を発見することができていただろう。しかし、曲がりなりにも発見に成功したというためには、5 年と 6 年の間の様々な周期に対する諸状況が計算できなければならなかったであろう。レクセル氏は、その仕事と同様に、1773 年末から 1774 年初めにかけて現れた彗星の周期を求める仕事にも従事していたのである。
レクセル氏の計算による 1770 年彗星の軌道要素は次の通りである。

昇交点黄経・・・・・・・・・132°20'
軌道傾斜角・・・・・・・・・1°34'30"
近日点と降交点のなす角度・・43°59'40"
近日点距離の対数・・・・・・9.8296000
近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 13.6950 日
半パラメータの対数・・・・・0.0808000
離心率の対数・・・・・・・・9.8938725
公転周期・・・・・・・・・・5 年半　》　【以上、論稿⑥の概略】

このラランドによる紹介は 2 頁半ほどの比較的簡単なものであるが、周期 5 年余の彗星が現れたというレクセルの主張を初めて広く世に紹介したという点に意義がある。
なお、論稿③は、1781 年ないし 1782 年に回帰してきた彗星がどの位置に見えるかの試算を行い、また、この彗星はその遠日点周辺において木星にかなり接近するので、そこで木星の引力の影響でその軌道が大きく変わる可能性があることを指摘している。これらの記述は、ラランドの紹介の中には見られないので、論

稿③は論稿⑥の書簡の後に書かれた可能性がある。

(3)第 2 次軌道要素について

レクセルは、論稿③や論稿⑥において、自己の算出した 1770 年彗星の軌道要素を示したが（第 1 次軌道要素）、その後、さらに改良を加えて、新たな軌道要素を算定した（第 2 次軌道要素）。この第 2 次軌道要素に基づいて書かれたのは論稿④、⑤、⑦、⑧である。その算定の仕方、特に周期の求め方について最も分かりやすく説明しているのは論稿⑦と思われるので、以下、論稿⑦の内容を紹介しよう。

レクセルは、1770 年彗星の軌道計算の結果をまずラランドに知らせてラランドが雑誌に投稿した後、さらに修正を加えた詳しい計算結果を 1778 年 11 月 2 日にメシエに送った。メシエは 1770 年彗星の発見者であるが、1779 年に刊行された雑誌に 1770 年彗星に関する約 60 頁に及ぶ長大な論稿を寄稿した。これが論稿⑦である。その中で、メシエは、自己がパリ天文台で行った同彗星の観察の詳細な記録を明らかにするとともに、他の天文台における観測データを掲載し、また、パングレやエリック・プロスペリン(Erik Prosperin, 1739-1803)らの計算による計 7 通りの軌道要素（いずれも放物線軌道）を示した。そして、最後に、レクセルから受け取った上記の 1778 年 11 月 2 日の書簡について触れ、原文はラテン語だが執筆者の希望によりフランス語に翻訳して掲載すると述べ、彼の書簡を 15 頁にわたって紹介した。

その書簡の冒頭において、レクセルは、「1770 年彗星が周期 5 年半の楕円軌道を描いているとの結果を導くまでの計算をすべて示すことは長過ぎて無益であろう」として、自分の得た（第 2 次）軌道要素を提示した。その内容は次の通りである。

昇交点黄経・・・・・・・・・・	132°00'00"
軌道傾斜角・・・・・・・・・・	1°33'40"
近日点と降交点のなす角度・・・	44°17'03"
従って、近日点経度・・・・・・	356°16'26"
近日点通過時刻・・・・・・・・	1770 年 8 月 13 日 13 時 5 分 すなわち 13.5450 日
近日点距離・・・・・・・・・・	0.6743815 (AU)
その対数・・・・・・・・・・	9.8296000
軌道長半径・・・・・・・・・・	3.1478606 (AU)
その対数・・・・・・・・・・	0.4980155
従って、半パラメータの対数・・	0.0807300
離心率の対数・・・・・・・・・	9.8952927
以上より導かれる周期・・・・・	5.585 年

このように冒頭から軌道要素が提示されているため、レクセルがどのようにしてこれらの数値に到達したのかは明らかでない。もっとも、上記のうち、周期及

びそれと連動する軌道長半径・半パラメータ・離心率については、後に見るように、極めて念入りな考察がなされている。

　この軌道要素がどの程度精確かを示すために、レクセルは、この軌道要素を用いて計算した結果と実際の観測データとの誤差を次のような表にしている。

パリ平均時(1770 年)	観測黄経	計算黄経	黄経誤差	観測黄緯	計算黄緯	黄緯誤差
6 月 14 日 11h29'48"	272°47'44"	272°48'01"	＋ 17"	N 6°40'24"	N 6°40'54"	＋ 30"
15 日 11h23'22"	272°51'49"	272°51'54"	＋ 5"	6°57'15"	6°57'51"	＋ 36"
17 日 11h11'33"	272°59'58"	273°00'52"	＋ 54"	7°38'51"	7°38'37"	－ 14"
20 日 10h40'48"	273°16'12"	273°17'02"	＋ 50"	9°05'38"	9°05'29"	－ 09"
21 日 10h27'45"	273°23'17"	273°24'26"	＋1' 09"	9°44'36"	9°45'27"	＋ 51"
22 日 12h09'36"	273°33'43"	273°34'09"	＋ 26"	10°39'05"	10°39'54"	＋ 49"
24 日 12h03'18"	273°59'58"	273°59'51"	－ 07"	12°59'55"	12°59'52"	－ 03"
25 日 11h23'22"	274°21'42"	274°21'21"	－ 21"	14°53'56"	14°54'37"	＋ 41"
27 日 13h27'55"	275°34'54"	275°36'06"	＋1' 12"	21°08'47"	21°08'38"	－ 09"
28 日 10h46'34"	276°45'58"	276°43'58"	－ 2' 00"	26°29'33"	26°30'39"	＋1' 06"
29 日 11h59'26"	279°42'45"	279°42'30"	－ 15"	37°57'32"	38°00'37"	＋3' 05"
8 月 2 日 15h03'15"	96°02'32"	96°02'04"	－ 28"	S 0°50'07"	S 0°49'59"	－ 08"
3 日 14h45'09"	96°25'15"	96°24'32"	－ 43"	0°53'36"	0°52'46"	－ 50"
4 日 14h12'48"	96°47'24"	96°47'46"	＋ 18"	0°55'44"	0°56'04"	＋ 20"
5 日 14h38'43"	97°13'51"	97°13'03"	－ 48"	0°59'17"	0°58'50"	－ 27"
6 日 14h29'42"	97°39'25"	97°38'45"	－ 40"	1°01'18"	1°01'16"	－ 02"
7 日 14h49'19"	98°06'40"	98°05'59"	－ 41"	1°03'35"	1°03'34"	－ 01"
8 日 14h20'13"	98°33'29"	98°33'17"	－ 12"	1°06'36"	1°05'35"	－ 1' 01"
9 日 14h48'10"	99°04'30"	99°02'40"	－1' 50"◆	1°09'33"	1°07'29"	－2' 04"◆
10 日 14h14'27"	99°32'36"	99°32'04"	－ 32"	1°09'13"	1°09'09"	－ 04"
11 日 14h23'33"	100°03'02"	100°02'37"	－ 25"	1°10'51"	1°10'40"	－ 11"
12 日 14h46'25"	100°34'48"	100°34'43"	－ 05"	1°12'52"	1°12'04"	－ 48"
14 日 14h37'29"	101°40'25"	101°40'04"	－ 21"	1°15'25"	1°14'25"	－1' 00"
15 日 15h43'33"	102°14'56"	102°15'37"	＋ 41"	1°16'43"	1°15'26"	－1' 17"
18 日 14h24'32"	103°59'24"	103°59'37"	＋ 13"	1°18'35"	1°17'39"	－ 56"
19 日 14h33'18"	104°36'03"	104°36'16"	＋ 13"	1°19'18"	1°18'37"	－ 41"
26 日 15h39'38"	109°03'44"	109°03'59"	＋ 15"	1°20'45"	1°20'05"	－ 40"

28 日 14h44'08"	110°19'42"	110°20'27"	＋ 45"	1°20'55"	1°20'05"	− 50"
29 日 15h21'53"	111°00'03"	111°00'31"	＋ 28"	1°20'05"	1°20'03"	− 02"
30 日 14h48'22"	111°39'12"	111°38'44"	− 28"	1°20'56"	1°19'58"	− 58"
31 日 14h38'25"	112°17'16"	112°17'49"	＋ 33"	1°20'23"	1°19'50"	− 33"
9 月 4 日 15h05'20"	114°52'41"	114°53'46"	＋1' 05"	1°19'23"	1°19'02"	− 21"
5 日 14h48'37"	115°31'07"	115°32'06"	＋ 59"	1°19'45"	1°18'47"	− 58"
8 日 15h57'04"	117°26'32"	117°27'41"	＋1' 09"	1°18'23"	1°17'51"	− 32"
9 日 15h06'30"	118°03'19"	118°03'52"	＋ 33"	1°18'22"	1°17'33"	− 49"
10 日 16h26'23"	118°40'26"	118°43'15"	＋2'49"◆	1°19'04"	1°17'12"	−1' 52"◆
14 日 14h16'26"	121°04'36"	121°05'35"	＋ 59"	1°16'18"	1°15'46"	− 32"
17 日 15h53'03"	122°52'40"	122°53'13"	＋ 33"	1°14'52"	1°14'35"	− 17"
18 日 15h30'16"	123°26'57"	131°27'06"	＋ 09"	1°14'58"	1°14'12"	− 46"
19 日 15h19'04"	124°00'32"	124°00'37"	＋ 05"	1°13'02"	1°13'48"	＋0' 46"
20 日 15h33'45"	124°34'17"	124°34'27"	＋ 10"	1°12'35"	1°13'35"	＋1' 00"
29 日 15h23'51"	129°14'54"	129°15'53"	＋ 59"	1°10'16"	1°09'42"	− 34"
10 月 1 日 15h23'22"	130°12'06"	130°13'31"	＋1' 25"	1°09'51"	1°08'54"	− 57"
1 日 16h33'28"	130°13'54"	130°14'55"	＋1' 01"	1°10'04"	1°08'53"	−1' 11"
2 日 15h43'37"	130°40'51"	130°41'59"	＋1' 09"	1°10'04"	1°08'29"	−1' 35"
2 日 16h38'50"	130°41'52"	130°43'05"	＋1' 13"	1°10'10"	1°08'29"	−1' 41"
6 月 30 日 12h03'11"	290°24'28"	291°01'45"	＋37' 17"	N60°04'23"	N61°22'26"	＋1°18'03"
7 月 1 日 12h03'23"	55°41'48"	59°59'15"	＋4°17'27"	N71°07'38"	N70°48'44"	−18'54"
7 月 3 日 11h03'45"	89°16'22"	87°40'38"	−1°35'44"	N25°32'03"	N25°18'50"	−13'13"

（注：◆・・・信頼性が低い数値）

この表を見ると、計算値との誤差が 30"~40"以内である観測値が黄経・黄緯とも概ね半数以上を占めており、一致度は相当高いと評価してよいと思われる。ただし、9 月末以降は誤差が次第に拡大している点は問題かも知れない。レクセルも上記の書簡の中で次のように述べている。

> この一致度は申し分ないと評価できよう。黄経については、9 月 10 日を除いて、誤差が 2 分を超えていない。この 9 月 10 日の観測は、他の観測と比較検討すると、その信頼性は低いと判断される。黄緯については、誤差の符号は負が圧倒的に多いが、十分ありそうな範囲に収まっている。6 月 29 日の黄緯は 3 分を超えているが、これはそのときの視差が非常に大きかったからと説明できる。なお、この軌道要素は観測に適合するように

仮定しているのだから、或る程度の増減は可能である。

こうして、レクセルは、以下、軌道要素を種々に変化させると観測との一致度がどう変わるかを調べる。この作業はかなり手間のかかるものであるが、レクセルが 1770 年彗星の周期を突き止めて立証するための必須かつ中心的なプロセスなので、彼の書簡に沿いつつ、やや丁寧に見ていくことにする。

a) 周期が 5 年と 6 年の間にある場合

レクセルは、まず、周期が 5 年と 6 年の間にある場合の例として、次の軌道要素を仮定した[38)]。

半パラメータの対数$(=p)$・・・・0.0808000
近日点距離の対数・・・・・・・9.8288794
近日点通過時刻・・・・・・・・1770 年 8 月 13.5400 日
昇交点黄経・・・・・・・・・・132°09'00"
軌道傾斜角・・・・・・・・・・1°33'40"
近日点と降交点のなす角度・・・44°07'59"

この場合、彗星の位置は次のように計算される。

1770 年	黄経(計算値)	黄経の誤差	黄緯（北）(計算値)	黄緯の誤差
6 月 15 日	272° 52' 12"	+ 23"	6° 58' 37"	+ 1' 22"
29 日	279° 42' 59"	+ 14"	38° 00' 54"	+3' 22"
8 月 2 日	96° 02' 07"	− 25"	（データなし）	（データなし）
29 日	111° 00' 33"	+ 30"	（データなし）	（データなし）
10 月 1 日	130° 13' 20"	+ 1' 14"	（データなし）	（データなし）

この結果は、前掲の最初の表と同程度に、あるいはそれ以上に、良く一致していると言えよう。

b) 周期 6 年の場合の検討

次に、周期をもう少し長くしたらより一致度の高い軌道要素が見つかるかを調べる。まず、この彗星が地球に接近しても地球の引力によって軌道が変化することはなかった場合を想定する。そして、次に、地球の引力が軌道に影響を与えた場合を想定し、それぞれの軌道を算出する。

そのために、周期は 6 年と仮定し、半パラメータとして或る値を想定する。他の軌道要素を定めるに当たっては、6 月 15 日と 6 月 29 日の観測と一致するかに注目した。というのは、周期と半パラメータという 2 つの軌道要素を仮定すれば、あとは 2 個の観測によって彗星の運動がすべて分かるからである。そこで、

周期・・・・・・・・・・・・・・6 年
半パラメータの対数$(=p)$・・・・0.0817000

と仮定すると、他の軌道要素は

近日点距離の対数・・・・・・・9.8273218
近日点通過時刻・・・・・・・・1770 年 8 月 13.2850 日
昇交点黄経・・・・・・・・・・132° 06'
軌道傾斜角・・・・・・・・・・1° 34' 30"
近日点と降交点のなす角度・・・41° 09' 56"
となる。これに従って彗星の位置を計算すると、次が得られる。

(周期 6 年、p = 0.0817000 とした場合)

1770 年	黄経(計算値)	黄経の誤差	黄緯(計算値)	黄緯の誤差
6 月 15 日	272° 51' 52"	+ 3"	N 6° 58' 06"	+ 51"
29 日	279° 43' 06"	+ 21"	N 38° 00' 27"	+ 2' 55"
8 月 2 日	96° 03' 18"	+ 46"	S 0° 50' 15"	+ 8"
29 日	111° 05' 42"	+ 5' 39"	S 1° 20' 06"	+ 1"
10 月 1 日	130° 11' 54"	− 12"	S 1° 07' 10"	− 2' 41"

また、
周期・・・・・・・・・・・・・6 年
半パラメータの対数・・・・・0.0818500
を仮定すると、他の軌道要素は
近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 13.2900 日
昇交点黄経・・・・・・・・・132° 28'
軌道傾斜角・・・・・・・・・1° 34' 02"
近日点と降交点のなす角度・・43° 47' 28"
となる。この場合、次が得られる。

(周期 6 年、p = 0.0818500 とした場合)

1770 年	黄経(計算値)	黄経の誤差	黄緯(計算値)	黄緯の誤差
6 月 15 日	272° 51' 25"	− 24"	N 6° 58' 06"	+ 51"
29 日	279° 42' 42"	− 3"	N 38° 00' 24"	+ 2' 52"
8 月 2 日	96° 02' 47"	+ 15"	S 0° 49' 03"	− 1' 04"
29 日	111° 04' 56"	+ 4' 53"	S 1° 19' 36"	− 29"
10 月 1 日	130° 10' 59"	− 1' 07"	S 1° 09' 01"	− 50"

上の２つの仮定のうち、後者は、8 月 2 日と 29 日の黄経については、前者より良好である。しかし、10 月 1 日の黄経については誤差がより大きい。また、黄緯に関しては、後者の方がやや誤差が大きい。以上より、周期を 6 年と仮定した場合には、半パラメータとして何を採るにせよ、またそれが 6 月 15 日と 29 日を満たすにせよ、時にはプラス、時にはマイナスの 2 分もの計算との誤差を示す観測が存在するであろう、との結論を下すことができる。

c) 周期 7 年の場合の検討

次に、もしも

周期・・・・・・・・・・・・・7 年

半パラメータの対数・・・・・0.0837000

を仮定すると、他の軌道要素は

近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 12.7950 日

昇交点黄経・・・・・・・・・132° 49'

軌道傾斜角・・・・・・・・・1° 35' 30"

近日点と降交点のなす角度・・43° 26' 10"

となる。この場合、次が得られる。

(周期 7 年、p = 0.0837000 とした場合)

1770 年	黄経(計算値)	黄経の誤差	黄緯(計算値)	黄緯の誤差
6 月 15 日	272° 52' 01"	+ 12"	N 6° 58' 16"	+ 1' 01"
29 日	279° 42' 50"	+ 5"	N 38° 00' 20"	+ 2' 48"
8 月 2 日	96° 06' 19"	+ 3' 47"	S 0° 49' 03"	− 1' 04"
29 日	111° 16' 18"	+ 16' 15"	S 1° 19' 31"	− 34"
10 月 1 日	130° 09' 22"	− 2' 44"	S 1° 09' 17"	− 34"

次に、

周期・・・・・・・・・・・・・7 年

半パラメータの対数・・・・・0.0840000

を仮定すると、他の軌道要素は

近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 12.8050 日

昇交点黄経・・・・・・・・・133° 58'

軌道傾斜角・・・・・・・・・1° 33' 50"

近日点と降交点のなす角度・・42° 14' 41"

となる。この場合、次が得られる。

(周期 7 年、p = 0.0840000 とした場合)

1770 年	黄経（計算値）	黄経の誤差	黄緯（計算値）	黄緯の誤差
6 月 15 日	272° 51' 54"	+ 5"	N 6° 58' 16"	+ 1' 15"
29 日	279° 42' 38"	− 7"	N 38° 00' 20"	+ 2' 58"
8 月 2 日	96° 05' 59"	+ 3' 27"	S 0° 49' 03"	− 4' 42"
29 日	111° 13' 54"	+ 13' 51"	S 1° 19' 31"	− 2' 08"
10 月 1 日	130° 06' 02"	− 6' 04"	S 1° 09' 17"	− 38"

後者の仮定の場合、8 月 2 日と 29 日の黄経の誤差は、前者の仮定よりもやや小

さい。しかし黄緯についてはかなり誤差が大きくなっている。また、10 月 1 日の観測についても誤差がより大きい。したがって、明らかに、周期 7 年を仮定した場合には、どのような仕方でも 1770 年彗星の観測をすべて満足させることはできない。また、周期 7 年の仮定の下では、幾つかの観測において、到底ありそうもないほど大きな誤差が得られることも同様に明らかである。

d) 8 月 2 日・29 日と 10 月 1 日を満たす軌道要素

以上のように、周期を 6 年よりも長く取ると、観測との誤差が次第に大きくなることが示された。次に、レクセルは、やや別の観点から、周期を 7～8 年に取った場合において、3 個の基準日の観測を満たすように軌道要素を定めたとき他の基準日の観測との誤差がどうなるかを検証した。以下はその概略である。

≪ さてここで、7 年よりもう少し長い周期の場合に、8 月 2 日から 10 月 2 日までの観測を満足させることができるかを調べる必要がある。この場合、明らかに、周期を 1 つに固定して後期の観測と適合させることは不可能であるし、また、もう少し幅を持たせて周期を若干増減しても無理である。もしも全観測を満足させるように周期を定める必要がある場合はどうか。この彗星によって 8 月 2 日から 10 月 2 日までの間に描かれた弧は、6 月 15 日から 10 月 2 日までの弧に比べるとかなり小さい。それ故、もし周期 6 年を仮定するならば、少なくとも相当大きな差異なしに、8 月 2 日から 10 月 2 日までの観測と適合するような軌道要素が容易に見出されるだろう。そこで、周期 7 年を仮定した場合に何が起きるかを調べてみよう。観測が要求するような黄経をひとたび見出すと、黄緯については常に容易に観測を満たせることが分かっていたので、私は、3 個の観測された黄経を満足させることに専念した。そして、次に 4 番目の観測の誤差がどうなるかを調べた。私がいつも使用する 4 つの観測は、8 月 2 日・12 日・19 日と 10 月 1 日である。私は、まず、8 月 2 日・29 日と 10 月 1 日に適合する軌道要素を求めた。それらは、

半パラメータの対数　・・・・0.0925000

近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 15.6280 日

近日点と降交点のなす角度・・46° 14' 06"

であり、

昇交点黄経・・・・・・・・・133° 58'

を仮定する。するとこの彗星の位置は、次のようになる。

(8 月 2 日・29 日、10 月 1 日に合わせた場合。p ＝0.0925 とする。)

1770 年	黄経（計算値）	黄経の誤差
8 月　2 日	96° 02' 27"	－　　5"
12 日	110° 41' 45"	＋　6' 57"
29 日	111° 00' 20"	＋　　17"

10 月 1 日	130° 12' 29"	+ 21"

これを見ると、8 月 12 日の黄経に 7 分の誤差があることが分かる。次に、別の計算によって分かったのであるが、もしも、周期 7 年の仮定の下で、8 月 2 日と 10 月 1 日の観測は満足させるが 8 月 29 日の観測はどんな誤差が出てもよいとした場合、8 月 12 日の観測との誤差は決して 7 分未満にならないのである。これより結論できるように、仮定する周期が長くなればなるほど、8 月 2 日・12 日、10 月 1 日の観測との一致度は低下する。引き続いて、私は、8 月 12 日・29 日、10 月 1 日の観測を満足させるものを求めた。その中で、うまく行ったのは、次のものである。

半パラメータの対数・・・・・0.0915000
近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 15.1340 日
近日点と降交点のなす角度・・45° 59' 24"
昇交点黄経・・・・・・・・・常に同上(＝133° 58')

この場合、彗星の黄経は次のようになる。

(8 月 12 日・29 日、10 月 1 日に合わせた場合。p ＝0.0915 とする。)

1770 年	黄経（計算値）	黄経の誤差
8 月 2 日	95° 49' 01"	－ 13' 31"
12 日	110° 34' 41"	－ 7"
29 日	111° 00' 20"	+ 17"
10 月 1 日	130° 12' 06"	± 0"

ここでは、8 月 2 日の観測の誤差が 13 分になっている。8 月 2 日についてのこの誤差は、周期を 7 年として 8 月 12 日と 10 月 1 日の観測を満足させるような仮定の下では、最も小さい。最後に、この周期 7 年の仮定の下で 8 月 12 日・29 日の観測を満たす場合には、軌道要素は

半パラメータの対数・・・・・0.0837000
近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 12.1500 日
近日点と降交点のなす角度・・43° 16' 33"
昇交点黄経・・・・・・・・・同上(＝133° 58')

となるのだが、このときは 10 月 1 日の観測の誤差は 35 分になる。

これらすべての考察の目的は、周期 7 年の仮定の下では、8 月 2 日から 10 月 2 日までの諸観測を完璧に満足させることはできない旨を立証することである。そこでは、少なくとも 7 分の誤差が常に生ずるが、これは現実的でない。

仮定する周期が増大するに従って観測の際の誤差も増大するだろうという反論には、もっともな点もある。しかし、私が望んだのは、計算によって私自身が納得することである。そこで、

周期・・・・・・・・・・・・・8 年

半パラメータの対数・・・・・0.1000000
を仮定すると、他の軌道要素は
近日点通過時刻・・・・・・・1770 年 8 月 17.2300 日
近日点と降交点のなす角度・・47° 32' 04"
昇交点黄経・・・・・・・・・同上(= 133° 58')
となる。この彗星の黄経は次のようになった。

(周期 8 年及び p = 0.100 を仮定した場合)

1770 年	黄経(計算値)	黄経の誤差
8 月 2 日	96° 02' 44"	+ 12"
12 日	100° 47' 42"	+ 12' 54"
15 日	102° 26' 33"	+ 11' 37"
29 日	111° 00' 53"	+ 50"
10 月 1 日	130° 12' 06"	± 0"

ここでは、8 月 12 日の観測について 13 分の誤差が存在する。結局、私が言うまでもなく、容易に見て取れることだが、周期 7 年の仮定の下では、後期の出現の観測を満足させる軌道要素のどれを用いても、前期の観測について非常に大きな誤差が生ずるのである。≫

e) 木星の影響による軌道の変化について

以上の考察により、1770 年彗星の周期が 5 年と 6 年の間にあることは確実となった。レクセルは次のように結論する。

この彗星の周期が私の諸仮定よりももっと短い可能性がないのかについては、検討の必要なしと考えた。そのような可能性があるとはきっと誰も考えないであろう。私がこれまで述べてきたことから容易に結論できるように、すべての観測を満足させるためには、私の仮定よりも半年以上短い周期を仮定することはできない。そして、後期の出現の観測のみを満足させようとする場合、観測から明白に乖離することを避けるためには、周期は 5 年と 6 年の間にあることを要する。私の見る所では、この限界は 4 年半を超えて後退させることもできないし、6 年半を超えて前進させることもできない。この周期の限界は 5 年と 6 年の間に押し込められている可能性が非常に高いと思われる。

しかし、まだ問題が残っている。レクセルの主張のようにこの彗星が 5～6 年ごとに回帰しているなら、なぜこれまで発見されなかったのだろうか。この問に対し、レクセルは、推測だがと断りつつ、この彗星は木星の影響を受けたために現在の軌道に変化した可能性があり、従来は異なる周期だったかも知れないと、次のように説明している。

1770年彗星のこの周期を確定するために私が行った推論の確かさが増せば増すほど、その彗星がたった一度しか観測されていないのは驚くべきことだと思えるに違いない。なぜなら、もしこの彗星が5年7か月経つごとにその近日点に回帰するならば、もっと頻繁に我々の目に見えたはずだし、特にこの17世紀は人々がますます熱心に天空の研究に打ち込んでいたのだからこの彗星に気付いただろうと思われるからである。かくも不思議な出来事を説明するために憶測をあれこれ並べることもできようが、私は極めて蓋然性が高いと思われる推測を1つだけ示して、足れりとしたい。この彗星の遠日点から太陽までの距離は木星から太陽までの距離とほとんど同じであるので、そこから或る推測が生ずる。すなわち、この彗星の運動がかつて木星によって攪乱されたが、それまで描いていた軌道はこの彗星が現在実際に回っている軌道とは全く違うものだった、という可能性があるのではないかという推測である。計算によると、この彗星は1767年5月27日に木星と合の位置にあり、両者の距離は彗星と太陽の距離の58分の1だったことが分かる。そして、木星と太陽の質量を考慮すると、彗星に及ぼす木星の作用は、太陽の3倍であり、また、遠日点では彗星の動きが非常に遅いので、より長い間その影響を及ぼす。その結果、木星の作用の影響はますます増大し、彗星の運動を変化させるのに十分な強さを有していた。さらに、私が求めた軌道要素を用いると分かることだが、この彗星と木星の次回の合は来年(1779年)8月23日に起きるはずだが、その時の彗星と木星の距離は彗星と太陽の距離の1/491であり、従って木星がこの彗星に及ぼす作用は太陽の作用の224倍になるので、彗星の運動に全面的な変化が生じないことはあり得ない。なお、この結果を厳密に真であるとみなすのは無理である。それは、この彗星の運動を計算するために用いる軌道要素を決定的な方法で定めてしまうことができないからである。というのは、軌道要素（特に周期）が、ほんの少しでも変化すると、この彗星の遠日点距離は明瞭に変化する。私が計算によって容易に見出したように、周期を少し減少させると木星の作用は第1の合で増加し、第2の合で減少するのである。この推論における私の主たる目的は、次のことを立証することである。すなわち、この彗星がかつて回っていた軌道は1770年になされた諸観測から導き出すことができるのであって、このことは、この彗星の以前の軌道がある程度十分長く続いた後に木星の作用を受けて変動しても同様だということである。

この彗星が地球に接近したときに地球の作用によってその運動が影響を受けたかについて、私は肯定も否定もしないでおく。ただ、地球の作用によって明瞭に看取できるほどの変化が生じたはずはない、というのが本当のように私には思われる。

1770年彗星の軌道要素に関するレクセルの考察の主要部分は以上で終わる。なお、補足として、レクセルは、この彗星の運動は木星の作用によって全く変わっ

てしまうかも知れないから 1781 年にまた観測できるかは分からないとしつつも、5 年と 6 年の間の種々の周期を仮定した上で、見える可能性の高い場所の黄経・黄緯のリストを作成して示している。

(4) その他の論稿について

既述の 8 編の論稿のうち、まだ検討していない論稿④、⑤、⑧について触れておこう。

論稿④は、基本的に論稿⑦と類似の内容と考えてよい。論稿④は科学院紀要 1778 年版第 1 部（1 月～6 月）に収録されているが、この版が実際に出版されたのは 1780 年なので、メシエに紹介されて世に出た論稿⑦よりも後に刊行されたことになる。但し、執筆時点で言えば、論稿④の方が論稿⑦の書簡より早かった可能性が高い。

論稿⑤は、既述のように、1778 年 10 月 13 日にペテルスブルク科学アカデミーの総会で行われたレクセルの講演を収録したものである。軌道要素については、④で示した第 2 次軌道要素を踏襲している。科学アカデミーの会員向けの講演であることを考慮して、数式は用いず、また彗星に関する一般的な話題等を盛り込んでいる。

この論稿⑤の講演内容はそのまま論稿⑧にも収録されている。但し、論稿⑧はそれにとどまらず、論稿⑦を要約した内容が後半に付加されており、軌道決定論としてはこの後半部分の方が重要である。なお、論稿⑧の刊行年は明記されておらず不明であるが、1770 年彗星が 1781 年に再び姿を見せた時の予想位置を掲載しているところから、1778 年末から 1781 年の間の刊行と見てよいであろう [39)]。

4. レクセルの著書(論稿⑧)における 1770 年彗星の考察

ここまでレクセルの 8 編の論稿を参照しつつ、1770 年彗星に関する彼の軌道計算の内容を考察してきた。その中で、論稿⑧は、時期的に最も後に執筆されたと考えられるが、その前半を占める講演部分（論稿⑤と同内容）は、彗星に関する興味ある一般論を含むとともに、1770 年彗星の軌道計算の過程を簡潔に示している。そこで、以下では、この講演の内容の概略を紹介し、彼の軌道計算法を理解するための一助としよう。

この論文の冒頭で、レクセルは、まず、従来の天文学では周期彗星の公転周期を計算によって求めた例は非常に少ないと指摘して次のように述べた。

> 天文学者たちが天体の運動に関する真の法則に従って彗星の軌道を計算するようになった以降も、この計算を押し進めて彗星が太陽の周りを回るのに要する時間を研究した例は非常に少ない。少なくとも、多少なりとも精度の高い正確さを以て、いずれかの彗星の真の周期を計算に基づいて決定することに成功した例はまだない。ラランド氏は、3 年前に、有名なハレー彗星の 1759 年の最新の出現時の観測を計算に用いて、その周期を確認したと主張しているが、これは例外である。それ故、私が 1770 年彗星

の研究を通じてその周期を首尾よく決定できたと思ったとき、その発見を伝えれば、そのニュースは天文学者たちにとってきっと特異に見えたはずである。もっとも、彼らにとって最大の驚きとなったはずのものは、この彗星の周期の極端な短さである。その周期は 5 年半をかろうじて超えるが、かかる結論に従えばこの彗星は 2 つの惑星すなわち木星と土星よりも短い時間で太陽の周りを回るのである。

このように彗星の周期が数年程度という結論は極めて意外なものであったため、レクセルは、これを直ちに発表することをせず、彼の計算結果が正当かつ合理的なものであることを立証すべく厳密な検算を実行したと述べている。そして、1770 年彗星の軌道計算について検討する前の予備的な考察として次のように述べた。

天文学者は、彗星の運動の計算に際して、彗星が放物線軌道を描くと仮定することに慣れている。それは、彼らがその運動は実際に放物線だと信じているからではなく、もしも楕円軌道の離心率を考慮に入れて計算すると非常に長くて複雑な作業になるのでそれを避けるためである。また、放物線は長く伸びた楕円の小さな一部と明瞭に区別するのが難しいので、或る彗星のおよその動きを知りたいだけのときと同じく、非常に多くの場合にこの仮定は受け入れやすい。しかしながら、すべての彗星が例外なく周期を有するというのは非常にありそうなことと思われる。彗星の軌道の離心率が大きくまた観測可能時間が短いために、ただ 1 回現れた間の観測によってその周期の長さを決定することは、多くの場合ほとんど不可能である。容易に理解できるように、大部分の彗星の場合、その周期は極めて大きく、それだけに計算による決定は困難である。それ故、現在までに観測された相当な数の彗星の中で、周期的な回帰性を持ったように見えるものは 3 つしかない。

レクセルは以上のように述べた後、3 個の周期彗星として、1682 年や 1759 年に現れた有名なハレー彗星のほかに、「1532 年と 1661 年に現れた彗星」及び「1264 年と 1556 年に現れた彗星」を挙げている。しかし、現在では、これらの彗星に関していずれもその回帰性ないし他の彗星との同一性は確認されていない。

次いで、レクセルは、彗星の周期の決定が難しいのは、その計算方法に責任を負わせるべきでなく、長く伸びた楕円という軌道の形状が原因であると説く。そして、惑星や彗星の実際の運動を他の天体と区別して認識するために、以下のような軌道要素を用いるのがよいとする。すなわち、軌道が動く平面に関する要素として、天体が黄道面と交わる点の日心黄経を表す「昇交点黄経」及び軌道平面と黄道面がなす角度を表す「軌道傾斜角」があり、軌道自体に関する要素として、①天体が太陽に最も接近したときの点（近日点）と太陽との距離、及び近日点と昇交点が太陽との間でなす角度、②天体が近日点を通過する時刻、③天体が

描く楕円軌道の離心率、がある。
　また、レクセルは、彗星の運動の研究は惑星の場合と種々の相違があることを指摘している。すなわち、惑星はほとんど円に近い軌道を持ち、かつ常に地球から観測可能な距離にある。それ故、各軌道要素は他の軌道要素と独立して観測・測定することが可能であり、惑星の公転周期も観測により決定できる。しかし、彗星の場合はその周期が長く（数世紀を超えるものもある）、実際に観測できる軌道はその一部に過ぎない。そのため、彗星の場合、近日点付近での観測に基づいて全軌道要素を同時に求める必要があり、その周期の決定方法は複雑化して、得られた結果は多分に正確さを欠く。また、楕円軌道の離心率が増加すれば、それにつれて彗星の周期決定はますます不確かなものになる。レクセルは、以上のような理由に加えて、最後に実際の観測上の問題も指摘する。すなわち、彗星は、通常、光度が非常に低い上にその周囲がぼやけているので、恒星との比較により極めて正確にその位置を決定するということができない。
　以上のような困難にもかかわらず、どのような状況下であれば彗星の周期決定が可能なのかを調べる価値はあるとして、レクセルは次のように述べる。

> 　一般に、彗星が出現期間中にたどる軌道部分が大きいほど、その彗星の周期を算出できる見込みが増大することは明らかである。そして、その出現期間中に軌道の多くの部分を進むのはどのような彗星かを判断するためには、特にその近日点距離に注目するのがよい。かかる状況については、すべての彗星を 3 つのグループに分けるのがよい。第 1 は、近日点距離が 1 天文単位(AU）を超えるグループである。第 2 は、近日点距離が 1 AU 以下でかつ 0.3～0.4 AU 以上のグループである。最後に、第 3 は、近日点距離が 0.3～0.4 AU 未満のグループである。観測されたすべての彗星のうち、第 1 のグループに属するのは、1729 年彗星と 1747 年彗星の 2 個しかない。両者の彗星とも数か月にわたって観測されたものの、その出現期間中に進んだ太陽周辺の軌道部分は、周期の長さについて何か解明できるものを引き出すには余りに微小だった。将来、この第 1 のグループの彗星が現れた場合、すべて同様の結果になる可能性が極めて高い。
> 　第 3 のグループの彗星もまた極めて少数である。このグループに入れるべき彗星の中で特に注目されるのは、1680 年、1744 年及び 1769 年の諸彗星である。これらの彗星の特徴としては、光の輝きが強いこと及び尾が長いことが挙げられる。これらの彗星は太陽の非常に近くまで接近するので、その出現期間中に太陽の周りに描く角度は相当に大きい。しかし、軌道の離心率が並外れて大きいはずであり、そのためその周期について何かを表明するのは無理である。例えば、1680 年彗星の周期を 100 年と仮定すると、離心率は近日点距離のほとんど 4 千倍にもなるので [40]、離心率決定の際のわずかな誤差が周期に対して大きな影響を与えることは確実である。
> 　第 2 のグループの彗星の場合には、出現期間内にその軌道の相当な部分

を描いていれば、周期を決定できると思ってよい。しかし、このグループに属する彗星がどれだけ多いにせよ、その中で十分長く観測されたものは極めて少ないし、また、疑わしい観測のものはすべて除外しなければならない。こうして、18 世紀になってから観測されたこのグループの彗星を調べてみると、出現期間の長さがまずまずなのは、1739 年、1759 年、1770 年、1773 年に現れた 4 個の彗星しかない。この中で、1759 年の彗星は 1456 年、1531 年、1607 年及び 1682 年に現れた彗星と同一であることが確実であり、その周期は確定しているので、1759 年の観測を用いて周期を研究する必要はない。もっともラランド氏はその研究を行ったのだが、そのおかげで天文学者たちは他の彗星について氏の研究を応用できるであろう。

レクセルは以上のような一般論を展開した後、いよいよ 1770 年彗星の検討に入る。まず、この彗星の観測や他の天文学者による軌道計算について、次のように説明する。すなわち、1770 年彗星を最初に発見したのはメシエであり、彼は精密な観測を行った。彼がこの彗星を観測できたのは、太陽に隠れる前の 6 月 14 日～6 月 29 日（以下この期間を「前期」と呼ぶ）と、太陽の陰から再び姿を現した 8 月 2 日～10 月 2 日（以下この期間を「後期」と呼ぶ）である。メシエの観測によれば、1770 年彗星が太陽の周りに描いた角度は、前期に 12°、後期に 107°であり、6 月 14 日から 10 月 2 日までに描いた角度は 172°である。これらの数字の大きさを見ると、この彗星の周期を算出することは有望と思われる。

次いで、レクセルは他の天文学者の軌道計算について概ね次のように述べている。パングレ氏は、メシエの観測データを用いて、前期のデータによく合う放物線軌道を算出したが、その軌道はどうしても後期のデータと一致しなかった。1770 年彗星は同年 6 月末に地球に相当接近したので、その影響で軌道が変化した可能性もある。或る放物線軌道で少なくとも後期の全観測を満足させることができないか、なお検討の余地がある。また、ウプサラの天文学者プロスペリン氏の計算によれば、単一の放物線軌道で全部を説明することはできないとのことである。すなわち、8 月 2 日から 19 日までの観測データを満たす放物線軌道は 8 月末から 10 月までのデータに合致せず、後者を満たす放物線軌道は前者のデータに合致しない。

レクセルは、プロスペリンの計算結果に興味を感じ、楕円軌道の仮説を立ててこの彗星の運動の計算を試みたとして、以下のような考察を展開した。（[　]は著者(植村)による補足である。）

軌道計算の精度は、主として、計算に用いる観測の期間中に彗星が描く日心角度の大きさに依存する。そこで、私は、まず、近日点から同じ距離にあってできるだけ離れた観測の両端の 2 点及びそのちょうど中間にあって近日点に近い点の 3 点を取ってみた。次に、3 個ずつの同じような観測の組を 10 組作って、軌道要素を計算してみたところ、特に公転周期について予想以上の結果が得られた。それらの周期の相違は半年を余り超えず、

平均の値は5年半だった。この結果は特異で信じ難かったので、後期の観測のみを用いて、より入念に検算を行った。当初のやり方だと、地球の引力が彗星の運動に作用を及ぼした場合、疑わしい結果になるからだ。後期の出現時のみから3個の観測を新たに10組とって計算したところ、驚いたことに、周期の平均は当初の計算とほとんど一致したのである。この結果を信じ切れなかった私は、種々の方法で周期計算を確かめてみた。その詳細は省くが、この彗星の軌道要素を以下に示しておこう。これらは観測とよく合致している。

Ⅰ　この彗星の昇交点黄経は132°である。

Ⅱ　軌道傾斜角は1°33'40″に過ぎず、木星以外のどの惑星よりも小さい。また、これまで観測された全彗星の中で最も小さい。

Ⅲ　降交点と[太陽を結ぶ線が]軌道軸となす角度は44°17´である。したがってこの彗星の近日点の位置は356°17´であり、うお座の26°の所にある。

Ⅳ　近日点通過時刻すなわち彗星が太陽に最も接近した時刻は1770年8月13日13時5分頃である。驚くべきことにこの彗星は7月1日に地球から1/70 AUまで接近したが、これはこの彗星が地球に近づき得るもっとも短い距離である。

Ⅴ　近日点距離は0.6743815 AUである。すなわち、水星を除きすべての惑星よりも、太陽に近い所を通過した。

Ⅵ　この彗星が描く楕円の長半径は、3.1478606 AUであり、遠日点距離は5.6213391 AUである。つまり、この彗星は、木星と遠日点がほとんど同じであり、したがって木星・火星・金星・地球の軌道を横切るが、常に土星の軌道の内側にあり、かつ水星の軌道の外側にある。

Ⅶ　最後に、至って唐突かつ興味深いことだが、この彗星の公転周期はおよそ5年7月である。それ故、この彗星は、他からの影響によってその運動を変ずることがなければ、1776年に近日点を周回したはずであり、また1781年10月に再び近日点に到達することが期待できる。

この軌道の観測との誤差は、ほとんどの場合、経度・緯度とも1'以内に収まっているが、そのことは以上の結果が正確であることを示している。たった1つだけ誤差が2'を超えた観測があるが、その観測の精度は疑わしい。このように観測データと一致度の高い軌道は真の軌道であるとみなすべき十分な理由がある。また、周期をこれより長くすると、観測との同程度の一致は主張できなくなる。

レクセルは以上のように、自己が算出した1770年彗星の軌道要素を示し、観測との一致度が極めて高いことを主張した。そして、さらに具体的な例証として、6年以上の周期を仮定した場合には、幾つかの基準日の観測データを満たし得なくなる旨を次のように説明した。

これを確証するため、私は、上記よりも若干長い周期を仮定し、6 月 15 日と 29 日の観測を満足させた上で、8 月 2 日と 29 日及び 10 月 1 日の観測との相違を調べた。

まず、周期を 6 年、近日点距離を 0.6719267 と仮定し、6 月 15 日と 29 日の観測を満足させると、8 月 2 日と 10 月 1 日の観測とは合致した。しかし 8 月 29 日については、経度の誤差が 5'を示した。なお、近日点距離を修正してこの 8 月 29 日の誤差を減らそうとすると、10 月 1 日の誤差がそれ以上に大きくなることが分かった。

次に、周期を 7 年、近日点距離を 0.6670785 と仮定し、6 月 15 日と 29 日の観測を満足させると、8 月 2 日については経度を 3'加え、8 月 29 日については 16'加える必要があり、10 月 1 日の観測については 3'減ずることになった。以上より、近日点距離を修正して 8 月 2 日の観測と計算結果を合わせると、10 月 1 日の観測が合わなくなるという結論を得た。こうして、周期を 6 年より長くすると誤差が増大することが確証された。なお、地球の引力によって 8 月以降の軌道が変化したのではないかという問題についても検討しておこう。

7 年の周期を仮定した場合、8 月 2 日と 29 日及び 10 月 1 日の観測を満足させると、8 月 12 日の観測が 7'違ってしまう。また同様に、種々の計算によれば、8 月 2 日と 10 月 1 日の２個の観測を満足させた場合、8 月 12 日の観測をも満足させるためには、8 月 29 日の観測に 7'の誤差を認めなければならないことが分かった。

次に、同じく 7 年の周期の場合、8 月 12 日と 29 日及び 10 月 1 日の観測を満足させる軌道要素は、8 月 2 日について 13'の誤差を生ずる。最後に、8 月 2 日、12 日及び 29 日の観測を満足させると、10 月 1 日について 36'の誤差を生ずる。

以上から明らかなように、周期 7 年を仮定して後期の諸観測を満足させることはできない。また、少なくとも幾つかの観測において 7'の誤差があったことを認めなければならないが、それは信じがたいことである。周期をもっと長く例えば 8 年とすると、観測との誤差がより大きくなることは明らかである。

5 年半ごとに回帰する天体が天文学者の目から何度も逃れていたとは考えにくいので、我々の決定した周期は一見して正しいとは思えないであろう。しかし、上述のように、この 1770 年彗星の観測が示すところによれば、その公転周期は 5 年半を大きく超えることはない。

こうして、レクセルは、観測データを基にして計算した場合には、1770 年彗星の軌道は周期 5 年半程度の楕円軌道にならざるを得ないことを説得力を持って立証した。しかし、これで問題はすべて解決したわけではない。レクセルは、まだ残る疑問に対して次のように述べた。

この彗星が 1770 年以前に観測されていない理由を自分なりに考えてみ

た。メシエ氏によるこの彗星の観測が 10 月初めに終わりを告げたとき、彗星は太陽からも地球からも 1 天文単位ほどの距離にあった。これから分かるように、この彗星が近日点周辺を通過したときに地球との距離が 1 天文単位以上離れていたならば、我々が目にすることはできなかったであろう。この原則に基づいて計算すると、この彗星が年の後半の 6 か月の間に近日点を通過する場合には、見ることができる。しかし、年の前半の 6 か月に通過する場合は見えるか極めて疑わしい。もし、近日点通過が何回も連続して年の前半の 6 か月間だったならば、天文学者たちの目にとまらなかったであろう。そして、もし年の後半の 6 か月間に近日点を通過したとしても、1770 年のように観測に好適な状況に恵まれるのは稀である。というのは、近日点通過が 8 月 13 日だったのでこれ以上はないほど地球に接近したのである。もし近日点通過が 1 週間早く、あるいは遅かったならば、1770 年の場合と比べて地球との最短距離は少なくとも倍になった。

上述のように、この彗星の遠日点における太陽からの距離は、木星の場合とほとんど同じであり、両者の遠日点の黄経は 14°しか違わない。両者は遠日点付近において合となったのであるから、たとえ木星が彗星に非常に近くまで接近したということが起きなかったとしても、木星の作用によって彗星の運動に何らかの変化が生じたのではないかと考えるのはもっともである。

実際、この彗星は 1767 年 10 月 28 日にその遠日点を通過しているので、同年 5 月 27 日に木星と合になったはずであり、合のときの両者の黄経はおよそ 170°57'である。木星とこの彗星の軌道が交差する点の黄経は 189°39'であり、またこの 2 つの軌道の傾斜角の差は 51'15"しかないので、合の時刻における木星と彗星の距離はおよそ 0.1 AU であった。これはこの彗星と太陽の距離の 58 分の 1 に当たる。太陽の重さは木星の約千倍なので、合のときに木星が彗星に及ぼす力は太陽の 3 倍だったはずである。このことはおそらく彗星の軌道に明瞭な変化を生じさせたであろう。この彗星の遠日点付近における運動は非常にゆっくりなので、十分長時間にわたって木星の作用を受けたはずである。木星の作用を正確に求めることは無理である。彗星の軌道要素、特に公転周期が少しでも変わると、その値が非常に変化するからである。以上の検討から示されるように、この彗星の運動は木星の作用によって相当な変化を受けており、以前にはもっとずっと長い公転周期を有していたと考えることも無理ではない。

木星の作用のために、将来 1770 年と同じ軌道でこの彗星を観測できるかどうか疑う余地がある。もし我々が算定した軌道要素が極めて正確ならば、木星とこの彗星の次の合は、およそ 1779 年 8 月 23 日 12 時になり、そのときの黄経は 183°34'である。計算が証明するところによれば、この黄経の場合、彗星と木星の距離はおよそ 1/491 AU であり、木星の作用は太陽の 224 倍にもなる。これは、彗星の運動を全く変えてしまうのに十分である。この結論をもっと正確に計算することは無理なのだが、それは軌道

要素に小さな変化があれば非常に異なる結果が生じ得るからである。しかし、あらゆる状況を考慮に入れると、少なくとも1767年又は1779年のどちらかの合において、この彗星の軌道は木星の作用により明瞭な変化を被った旨を主張することができる。

この彗星は2つの他の惑星すなわち火星と金星の軌道を横切るが、これらの惑星が彗星の運動に重要な変化を一切与えていないのは確実である。これらの惑星の質量が小さいこととこの彗星が両惑星の軌道に余り近づかないことがその原因である。既に述べたように、この彗星が1770年7月1日に地球に最も接近したとき、地球との距離は1/70 AUだった。すなわち、この彗星は地球からおよそ212万ヴェルスタ(Verstes de Russie) 離れていたが、これは地球と月の平均距離の6倍に当たる。この距離がいかに短いにせよ、地球がその時この彗星の運動を変化させるだけの影響を与えたかを明言することは難しい。或る著名な数学者は地球の引力圏は地球の半径の125倍を大きく超えないことを証明したと主張している。この彗星と地球の大接近中の距離は、地球の半径の357倍に等しいので、その主張に根拠があるならば、明らかに地球はこの彗星の運動に何らの変化も与えていない。我々は、この彗星の運動に関し、地球との大接近より前の観測も後の観測も全部満足させる軌道要素の発見に成功しているので、彗星に対する地球の作用は取るに足らないものであったというのが正しいと思われる。

このように、レクセルは、1767年に木星の引力によりこの彗星の軌道が大きく変わって1770年当時のような軌道になった可能性があることを指摘し、それ故に従来発見されなかったのかも知れないし、また、1779年の木星接近の影響を受けて1881年には同じ軌道では回帰しない可能性があると述べている。もはやこれ以上の論証はできないが、最後にレクセルは、彗星と地球の衝突の危険について次のように述べて、講演を締めくくった。

観測によってその運動が確認されたすべての彗星の中で、1770年の彗星より地球に近づいた彗星は存在しない。かかる接近にもかかわらず、この彗星が地球の構造を変化させるような影響を何か与えたという証拠は少しもないし、また、この彗星が他の天体の作用によって何らかの変化を被った可能性もない。このことは、おそらく他の論拠よりも、恐るべき効果について我々の精神を鎮めるのに役立つに違いない。一群の学者たちは、想像力を働かせて、彗星の接近を恐るべきものに仕立てるのが好きであるが。彗星が地球に大接近し、その結果、地球に衝突することは全くあり得ないと保証することは実際にはできない。しかし、少なくとも、そのような出来事が起きる確率がほとんど無限に小さいことは確かである。というのは、かかる遭遇が生じるためには、彗星が黄道との交点を通過する際に地球の軌道上に存することのみならず、地球がその時刻に軌道上のその点にぴったり来ることが必要だからである。軌道要素が知られているすべて

の彗星の中で昇(降)交点と太陽との距離が黄道の半径とほとんど等しいものは 3〜4 個しかない。これらの彗星の昇(降)交点の位置が時とともに変化して、いずれかの彗星が地球の軌道を横切る可能性はある。しかし、彗星が地球の軌道上の点を通過するときに地球がぴったりその点に位置するというのは、極めて期待し難い出来事である。

彗星が地球と衝突はしないものの非常に接近するということは彗星が黄道面との交点から十分離れた所にいても生じ得るのだが、その場合に地球の構造にどのような影響がもたらされるかを一般的に決定するのは難しい。彗星が近日点に近づいたときの運動は高速であること及び彗星の質量は小さいと思われることから推測すると、彗星の接近が地球に及ぼす効果は危険なものではなかろう。地球の近くを通過した 1770 年の彗星は何ら人々が気付くような混乱を引き起こさなかったのであるから、将来、地球に接近するかもしれない彗星については、予見することも避けることもできない出来事として、恐れの対象外とするのが合理的である。

以上でレクセルの講演は終わる。1770 年彗星の軌道要素や周期に関するレクセルの計算は今日の眼から見ても概ね正しかったと評価できる。しかし、木星の引力の影響で軌道が変わり、2 度目の回帰が確認されなかったために、史上初の超短周期彗星として公認されなかったのはレクセルにとって不運だった。

ここまで見てきたレクセルの軌道計算についての全体的な評価を次章で行おう。

第 4 章　レクセルの軌道計算の評価

　レクセルの軌道計算についてこれまでに検討してきたところをまとめると、次の諸点を指摘できよう。

(1) レクセルの軌道計算は、その基本的な部分をオイラーに負っている。
(2) レクセルが用いた軌道計算には、特にそれまでの計算のやり方を超える画期的な計算技法は見当たらない。
(3) レクセル彗星の 5 年余という周期は理論的に算出したものではなく、種々の値を当てはめた結果を比較検討して帰納的に得られたものである。
(4) レクセルが相当に正確な周期を算定できたのは、長期間にわたって精度のよい観測データが多数得られたからだと言ってよい。
(5) レクセル彗星が地球に大接近して多数の観測データが得られたことは幸運であり、そのおかげで当時誰も予想していなかった超短周期彗星の存在を正しく指摘することができた。しかし、同彗星がその後、木星に接近して軌道を変えたために 2 度目の回帰を観測できなかったのは不運であり、結局、レクセルは史上初の超短周期彗星の発見者という栄誉を得るに至らなかった。

第2部　天体の軌道計算の発展に関する考察 —— 1797年～1818年を中心に
第1章　概説

ニュートンがプリンキピアで彗星の放物線軌道の計算法を示して以来、多くの天文学者がその改良に取り組んだ。彗星の軌道について厳密解を求めることは無理であり、近似計算にならざるを得ない。そして、その近似方法には種々のものがあり得るので、18世紀の天文学者たちが考案した軌道計算法も様々であった。

そのような事態はオルバースが1797年に刊行した著書によって一変した。この著書はそれまでの多くの軌道計算法の検討の上に立って、効果的な近似法を提案し、それによって放物線軌道の計算が正確かつ確実に行えるようになった。

しかし、楕円軌道を描く彗星や小惑星の軌道計算は全く別論であった。1800年の時点では、3個の観測からその楕円軌道を計算することは不可能ではないかとさえ思われていたほどである。この状態を打破したのがガウスであった。彼は、1801年に3個の観測から楕円軌道を計算する方法を案出し、同年に発見された小惑星ケレスの軌道を正確に計算してその再発見に貢献した。

もっとも、ガウスはその軌道計算法を直ちに公表せず、数年にわたって改良を加えていた。その計算法が公開されたのは彼の1809年刊行の著書においてであった。すなわち、1809年まではガウス以外の天文学者たちは3個の観測から彗星や小惑星の楕円軌道を計算する一般的な方法を有していなかったことに注意する必要がある。

19世紀最初の10年間においては、3つの注目される彗星の発見があった。第1は、1805年10月に発見された彗星である。この彗星は、周期3年余の超短周期彗星であることが後に判明してエンケ彗星と呼ばれるようになるが、この時点では放物線軌道の彗星と思われていた。

第2は、1805年11月に発見された彗星である。この彗星については、1772年に観測された彗星と同一であることが確実視されたので、短周期彗星であることは分かったのだが、その周期は判然としなかった。ベッセルは、周期33年として軌道を計算すると観測データとの誤差が大きいことを見出したのみに終わった。ガウスは、不確実としながらも、一応4年余という周期を算出したが、実際の周期は6.6年であった。すなわち、当時のガウスにとっては、小惑星の楕円軌道については相当正確に計算できたが、彗星の楕円軌道を短期間の観測データに基づいて正確に算定することはまだ無理だったと言える。

第3は、1807年9月に発見された大彗星である。この彗星は半年間にわたって観測され、数多くの観測データを残した。ベッセルは、1810年刊行の著書において、新しい計算理論を提示しつつ、この彗星の周期を1713年と算定した。この著書の刊行以後、ドイツの天文学者らによる彗星の軌道計算の理論と技術は目覚ましく進歩し、彗星の周期についても相当正確な値が算出できるようになっていった。

例えば、1811年3月に発見されたフロジェルグ彗星[41]について、ベッセルは周期3383年というかなり的確な値を示した。また[42]、1815年3月に発見されたオルバース彗星について、ベッセル・ガウス・ニコライはそれぞれ70数年程度の

周期を算出したが、それらは概ね妥当な値と評価できるものであった。なお、1812 年 7 月に発見されたポンス・ブルックス彗星について、エンケは 1816 年に周期約 71 年という計算結果を発表したが、これも概ね妥当な値であったと言える。

以上のように、周期彗星の軌道計算のレベルは、1810 年頃を境にして著しく進歩した感がある。この第 2 部では、1800 年頃から 1818 年頃までを視野に入れて、その間の軌道計算論の進展の様子を具体的に探ることにしたい。

第 2 章　オルバースの放物線軌道計算法

1. 序

ハインリッヒ・オルバース(Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers, 1758-1840)は、1758 年にドイツのブレーメンで生まれ、1780 年にゲッティンゲン大学の医学部を卒業して、ブレーメンで開業医となった。彼は、医業のかたわら天体観測を熱心に行い、小惑星のパラスやベスタを発見した。また 1815 年にはオルバース彗星を発見した。

このように、オルバースは実地天文学における功績が大きいが、「オルバースのパラドックス」を提唱するなど、理論天文学にも貢献した。中でも 1797 年に刊行された彼の著書は、3 個の観測から彗星の放物線軌道を正確に計算する方法をほぼ完璧な形で示したものであり、その影響は大きかった。ニュートン以後に百花繚乱の感があった放物線軌道計算論はここにようやく収束し、それ以後の理論天文学は楕円軌道の計算や軌道改良の問題に重点が移っていく。

また、オルバースは当時の天文学者と幅広く交流し、多くの著名な天文学者の成長に寄与した。例えば、オルバースは、1801 年末にガウスの軌道予測に基づいてケレスの再発見に成功したときに、その成功は正確な軌道計算を行ったガウスの功績である旨を直ちに明言し、それによってガウスの名が一躍欧州中に知られることになった。

そのほか、オルバースは、無名時代のベッセルが自分を訪ねてきたときに、いち早くその才能を見出して一流の天文学者に育てるとともに、大学卒業歴のないベッセルを世に送り出すために種々の尽力をした。また、ガウスやベッセルのみならず、ガウスの指導を受けたニコライやエンケらとも、書簡のやりとりを通じて終生交流し、彼らに大きな影響を与え続けた。

以下の本章では、オルバースの 1797 年の著書[43)]（以下「1797 年書」と呼ぶ。）における放物線軌道の計算方法の骨子を概観しよう。

2. 1797 年書の内容（第 3 章）

1797 年書は、フランツ・クサーヴァー・フォン・ツァッハ(Franz Xaver von Zach, 1754-1832) による 30 頁もの長い序言のほか、オルバースの考察を述べた前半部分と種々の有用な表を集めた後半部分から成る。そのうち、前半部分の内容は次の通りである。

第 1 章　彗星の軌道の決定及びその決定のために提案された諸方法に関する一般的考察（第 1 節～第 19 節。1～20 頁）

第 2 章　彗星の軌道の決定のために提案された幾つかの 1 次及び 2 次の方程式について（第 20 節～第 32 節。21～38 頁）

第 3 章　彗星の軌道の近似的な決定方式を見出すための簡便で容易な方法（第 33 節～第 53 節。38～65 頁）

第 4 章　彗星の軌道要素を見出した後の改良（第 54 節～第 82 節。66～96 頁）

以上のうち、第 1 章と第 2 章では、ニュートン以来の彗星の軌道決定を論じた多くの文献を網羅的に参照しつつ、それぞれの特徴や長所・短所等が考察される。オルバースの独自性が現れるのは第 3 章以降である。第 3 章では、まず近似的に軌道を求める簡便な方法が提唱される。従来の軌道計算法の多くが観測の間は彗星が等速直線運動をすると仮定していたのに対し、オルバースは、次のような仮定を提唱する。すなわち、1 番目の観測時の彗星の位置と 3 番目の観測時の彗星の位置を結ぶ線分は、2 番目の観測時の彗星の位置と太陽を結ぶ線分によって 2 つに分割されるが、その分割の比は、1 番目の観測時から 2 番目の観測時までの経過時間と 2 番目の観測時から 3 番目の観測時までの経過時間の比に等しい、とするのである。この仮定により、計算が相当に簡単になるとともに精確になるとオルバースは主張している。彼は、1769 年の彗星（第 1 部第 1 章で扱った彗星）を例にとって計算の仕方と結果を示しているので、その部分を以下に一部訳出しよう([　]の部分は著者(植村)による補足である。また、訳出部分と著者の記述との区別を明確にするため、本章では特に訳出部分を『　』で囲んで示した。)

『　第 3 章　彗星の軌道を決定する諸要素を近似的に求めるための簡潔にして容易な方法　（抄訳）

§45

この方法がどの程度簡潔で快適かを評価できるようにするため、従来用いられてきた方法のどれかと手短に比較してみよう。加えて、この方法は一般的に使用可能であり、或る彗星を 3 回しか観測できなかった場合にも適用できる。もちろん、この方法は、地球軌道や彗星軌道が中間動径により経過時間に比例して分割されるという仮定を設けているので、全く厳密というわけではない。もっとも、この不都合は、実際より過大に見積もられてはいない。オイラーやランベルトは、彗星軌道の検討に際して、まさしく同じことを仮定した。私は、ただ、地球軌道についても同じ仮定を付け加えただけである。そして、それによる不都合、すなわち幾何学的厳密さの欠如は、きっと目につくほど増大も減少もしないであろう。この方法は、直接に計算する何らかの方法よりもはるかに厳密である。なぜならば、直接に計算する場合、暗黙のうちに又は明示的に、彗星はその軌道の一部分では等速直線運動をしているとみなすのが常だからである。あるいは、ラプラス氏のように、それらの弧を極めて小さく取って等速直線運動の仮定が全く誤差を生じないようにできるとしても、それらの小さな弧を求めるためには不確実な補間法によらなければならない。また、完璧に真実とは言えないこの仮定のおかげで、何らかの必要な改良がいかに容易に達成できるかを第 4 章で示そう。

§46

この方法が簡潔かつ快適であることは、或る完璧な例を通じて、なお一層よく理解できよう。そのために 1769 年の彗星を選択する。それは、1 つには

この彗星の真の軌道が非常に正確に知られているからであるが、その他にこの彗星に対しては他の方法が非常に多く適用されたからでもある。以下の観測データはパングレの彗星論から取った。

時刻			α[彗星の黄経]	β[彗星の黄緯]
9月4日	14時	0分	80° 56' 11"[$=\alpha'$]	17° 51' 39" (南) [$=\beta'$]
8日	14時	0分	101° 00' 54"[$=\alpha''$]	22° 05' 02" [$=\beta''$]
12日	14時	0分	124° 19' 22"[$=\alpha'''$]	23° 43' 55" [$=\beta'''$]

この3個の観測については、次の通りである。

A[太陽の黄経]	log R[太陽と地球の距離の対数]
162° 42' 05" [=A′]	0.003132 [=R′]
166° 35' 31" [=A″]	0.002665 [=R″]
170° 29' 20" [=A‴]	0.002184 [=R‴]

したがって、$t' = t'' = 4$ 日，$\dfrac{t''}{t'} = 1$，　T $= 8.00$ 日　である。

[t'は1番目と2番目の観測の間の経過時間、t''は2番目と3番目の観測の間の経過時間、Tは1番目と3番目の観測の間の経過時間]

さて、Mの計算は次のようになる。[Mはρ'''をρ'で割った値]

$$\log\tan\beta'' = 9.608237$$
$$\log\sin(\mathrm{A}'' - \alpha'') = 9.959299$$

$$\log m = 9.648938 \qquad [m\text{は}\tan\beta''/\sin(\mathrm{A}'' - \alpha'')]$$
$$\log\sin(\mathrm{A}'' - \alpha') = 9.998750$$
$$\log\sin(\mathrm{A}'' - \alpha''') = 9.827766$$

$$\log m\sin(\mathrm{A}'' - \alpha') = 9.647688$$
$$\log m\sin(\mathrm{A}'' - \alpha''') = 9.476704$$

$$\tan\beta''' = 0.43963$$
$$m\sin(\mathrm{A}'' - \alpha''') = 0.29971$$

$$\tan\beta''' - m\sin(\mathrm{A}'' - \alpha''') = 0.13992$$

$$m\sin(\mathrm{A}'' - \alpha') = 0.44431$$
$$\tan\beta' = 0.32221$$

$$m\sin(\mathrm{A}'' - \alpha') - \tan\beta' = 0.12210$$
$$\log 0.12210 = 9.086716$$

$$\log 0.13992 \quad = 9.145880$$

$$\log \mathrm{M} \quad = 9.940836$$

ここで次式を計算する。[ρ'は 1 番目の観測時における、地球と彗星から黄道面におろした垂線の足との距離]

$$r'^2 = \mathrm{R}'^2 - 2\mathrm{R}' \cos(\mathrm{A}' - \alpha')\,\rho' + (\sec\beta')^2 \rho'^2$$

$$r'''^2 = \mathrm{R}'''^2 - 2\mathrm{R}''' \cos(\mathrm{A}''' - \alpha''')\,\mathrm{M}\rho' + (\sec\beta''')^2 \mathrm{M}^2 \rho'^2$$

その際、

$$(\sec\beta)^2 = \frac{1}{(\cos\beta)^2}$$

は周知であり、次のようになる。

$$r'^2 = 1.01453 - 0.28854\,\rho' + 1.10393\,\rho'^2$$

$$r'''^2 = 1.01011 - 1.21482\,\rho' + 0.90869\,\rho'^2$$

弦については、

$$\begin{aligned} k''^2 = {} & r'^2 + r'''^2 - 2\mathrm{R}'\mathrm{R}''' \cos(\mathrm{A}''' - \mathrm{A}') \\ & +2\mathrm{R}'''\cos(\mathrm{A}''' - \alpha')\rho' + 2\mathrm{R}'\cos(\mathrm{A}' - \alpha''')\mathrm{M}\rho' \\ & -2\mathrm{M}\cos(\alpha''' - \alpha')\rho'^2 - 2\tan\beta'\tan\beta'''\,\mathrm{M}\rho'^2 \end{aligned}$$

を計算すると次のようになる。

$\log \mathrm{R}' = 0.003132$

$\log \mathrm{R}''' = 0.002184$

$\log\ \cos(\mathrm{A}''' - \mathrm{A}') = 9.995976$

$\log$ ・・ 0.001292

$\mathrm{N.Z.} = 1.00298$ [N.Z.は真数]

$\log \mathrm{R}''' = 0.00218$

$\log\ \cos(\mathrm{A}''' - \alpha') = 7.8940$

$\log$ ・・・ 7.89618

$\mathrm{N.Z.} = 0.007875$

$\log \mathrm{M} = 9.940836$

$\mathrm{Log}\, \mathrm{R}' = 0.003132$

$\log\ \cos(\mathrm{A}' - \alpha''') = 0.894274$

$\log$ ・・・ 9.838242

$\mathrm{N.Z.} = 0.689035$

$\log \mathrm{M} = 9.940836$

$\log\ \cos(\alpha''' - \alpha') = 9.861377$

$\log$ ・・・ 9.802213

$\mathrm{N.Z.} = 0.63418$

$\log \mathrm{M} = 9.940836$

$\log \tan\beta' = 9.508173$

$\log \tan\beta''' = 9.643090$

$\log$ ・・・ 9.092099

$$\mathrm{N.Z.} = 0.12362$$

これにより係数はすべて決定された。それらを重ね合わせ、ρ'のない項、ρ'の項、ρ'^2 の項に掛け、適切な正負の符号を付して $r'^2 + r'''^2$ に加えると、次のようになる。

$$\begin{aligned} r'^2 + r'''^2 = {} & \ 2.02464 - 1.50336\,\rho' + 2.01262\,\rho'^2 \\ & - 2.00596 + 1.39382\,\rho' - 1.51560\,\rho'^2 \\ \hline k''^2 = {} & \ 0.01868 - 0.10954\,\rho' + 0.49702\,\rho'^2 \end{aligned}$$

したがって、3 個の方程式は次のようになる。

$$r''' = \sqrt{1.01011 \ - \ 1.21482\,\rho' \ + \ 0.90869\,\rho'^2}$$
$$r' = \sqrt{1.01453 \ - \ 0.28854\,\rho' \ + \ 1.10393\,\rho'^2}$$
$$k'' = \sqrt{0.01868 \ - \ 0.10954\,\rho' \ + \ 0.49702\,\rho'^2}$$

さてここで $\rho' = 1$ とおくと、

$$r' = 1.40\ldots., \quad r''' = 0.84\ldots., \quad k'' = 0.62\ldots.$$

となり、これによりこの弦を描くための時間は 26.88 日となる。しかし、観測によれば 8.00 日であった。それ故、この ρ'の値は、はるかに大き過ぎる。

そこで、$\rho' = 0.5$ と取ると、

$$r' = 1.07\ldots., \quad r''' = 0.80\ldots., \quad k'' = 0.297\ldots.$$

となるので、上記時間は 11.83 日となり、まだ大き過ぎる。

それ故、$\rho' = 1/3 = 0.333\ldots$ とおくと、

$$r' = 1.02\ldots., \quad r''' = 0.84\ldots., \quad k'' = 0.194\ldots.$$

で、時間は 7.79 日となった。これはやや小さい。

以上より、私は、ρ'の真の値は 0.35 とそれほど違わないと結論した。それ故、$\rho' = 0.345$ 及び $\rho' = 0.350$ とおき、両者の値について時間をより精確に求めたところ、次のようになった。

$\rho' = 0.345$	$\rho' = 0.350$
$r' = 1.02294$	$r' = 1.02409$
$r''' = 0.83616$	$r''' = 0.83441$
$k'' = 0.20012$	$k'' = 0.20304$
$\mathrm{T} = 7.9271$	$\mathrm{T} = 8.0410$

したがって、第 1 の仮説の誤差は -0.0729 で、他の方は $+\,0.0410$ となり、これより ρ'の真の値は 0.34820 となる。また、簡単な補間法により、次

を得る。

$$r' = 1.02367,\ r''' = 0.83504,\quad \log\rho''' = \log \mathrm{M}\rho' = 9.482665.$$

§47

ここで軌道全体を決定するため、次の公式で日心黄緯を計算する。

$$\sin\lambda = \frac{\rho\tan\beta}{r}$$

これにより、

$$\lambda' = 6°17'34'',\quad \lambda''' = 9°12'19''$$

となる。さらに、地球からの離角は、公式

$$\sin\varepsilon = \frac{\rho\sin(A-\alpha)}{r\cos\lambda}$$

により、

$$\varepsilon' = 19°47'47'',\quad \varepsilon''' = 15°25'16''$$

となる。したがって、この彗星の日心黄経［= C］は、

$$\mathrm{C}' = 2°29'\,52'',\quad \mathrm{C}''' = 5°54'\,36''$$

となる。公式

$$\cot\omega = \frac{\tan\lambda'''}{\tan\lambda'\sin(\mathrm{C}'''-\mathrm{C}')} - \cot(\mathrm{C}'''-\mathrm{C}')$$

より、$\omega = 7°11'45''$ を得る。したがって、降交点（黄緯は南緯なので）の黄経は、

$$C' - \omega = 2°29'52'' - 7°11'45'' = 355°18'07''$$

となる。軌道傾斜角は、公式

$$\tan i = \frac{\tan\lambda'}{\sin\omega}$$

を用いて、41°21'30'' と求められる。ここで u' と u''' を求める。そのために、公式

$$\cos u' = \cos\lambda'\,\cos\omega$$
$$\cos u''' = \cos\lambda'''\,\cos(\mathrm{C}'''-\mathrm{C}'+\omega)$$

を用いて、

$$u' = 9°17'34'',\quad u''' = 14°00'40''\ \text{及び}\ u'''-u' = \chi = 4°27'46''$$

となる。私はここで φ すなわち 3 番目の観測における真近点角を求めるが、それはこの時の方が太陽により近いからである。公式

$$\tan\tfrac{1}{2}\varphi = \cot\tfrac{1}{2}\chi - \frac{\sqrt{\frac{r'''}{r'}}}{\sin\frac{1}{2}\chi}$$

を用いて、$\frac{1}{2}\varphi = 67°56'12''$ を得るので、3 番目の観測における真近点角は、135°52'24'' となる。この φ に、降交点から彗星までの間隔すなわち $u''' = 14°0'40''$ を加えると、降交点から近日点までの間隔として、149°53'04'' を得る。これより、近日点の黄経は 145°11'11'' となる。近日点距離 π は、

$$\pi = r'''(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2 = 0.11782$$

である。最後に、これより 3 番目の観測から近日点通過までの時間は 24 日間 20 日 22 分となるので、近日点通過時刻は 10 月 7 日 10 時 22 分と求められる。

§48

したがって、得られた軌道要素は次のようになる。

昇交点黄経	175° 18' 07"
軌道傾斜角	41° 21' 30"
近日点経度	145° 11' 11"
近日点距離	0.11782
近日点通過時刻	1769 年 10 月 7 日 10 時 22 分

この軌道要素を既知のものと比較すると、真の値に非常に近いことが分かる。この軌道要素は、特に、ランベルトが算定したものとほとんどぴったり一致している。彼の軌道要素もまた近日点通過前の観測に基づいているが、その算定ははるかに多くの労力と反復作業によってやっとなされたのである。ランベルトの計算でも我々の計算でも軌道傾斜角はいささか大きく算定されているが、その原因は計算方法よりも観測に求めることができるように思われる。パングレ氏は、私がここで使ったのと同じ観測を用い、ラプラス氏の方法に従ってこの彗星の軌道を計算した。彼の算出した近日点距離と近日点通過時刻は（彼はその他の軌道要素を決定していない）、ここで見出した値よりずっと真の値から離れている。そして、それと比べて我々の計算がどんなにずっと短いかは、一瞥しただけで分かる。』

オルバースは以上のように述べ、1769 年の彗星を例に取って、オルバースの近似方法がいかに有効かを示した。

3. 1797 年書の内容（第 4 章）

第 3 章で得られた軌道は暫定的なものであり、改良が必要だが、第 4 章ではその改良方法を考察している。オルバースは第 4 章の冒頭で次のように述べる。

『　第 4 章　彗星の軌道要素を得た後の改良

§54

前章で説明した、3 個の観測から彗星の軌道を決定する方法によって得られる軌道要素は、まだ十分に精確ではなく、その後さらに改良と是正が必要である。というのは、1 つには、真実と完全には一致しない仮定をおいているためにその手順自体が全く厳密というわけではないからである。また 1 つには、計算に際して互いにそれほど離れていない観測のみが用いられるが、経過時間が小さくなるほど、不可避的な誤差が軌道要素に大きな影響を与える

からである。

§55

したがって、彗星の観測が互いに非常に離れている場合や、あるいは、同じようなことだが、軌道計算の対象である彗星が長期間、目撃されて観測された場合には、上記の方法だと不必要なやり方にこだわり続けることになってしまうであろう。むしろそのようなときは、直ちに、最も離れた観測が使えるような改良方法を選択すべきである。以下では、そのためにもっとも快適なものを提案するつもりである。他方、非常によくあることだが、彗星が長期間でなく、例えばほんの 2～3 週間のみ目撃された場合には、前章で提案した手続は改良しないで、単に放っておくしかない。この改良は、すぐに見るように、非常に容易で快適である。互いに余り近過ぎないような観測を直ちに最初の計算の基礎に据えれば、その後もうまく進行する。経過時間が 12 日、14 日、16 日あるいはそれ以上になっても懸念無用であって、彗星と太陽の見かけ上の間隔が余り小さくないときは特にそうである。

既にたびたび想起しているように、もし現実に、仮定通りに、中間動径が地球軌道の弦を――彗星軌道の弦と同様に――経過時間に比例して分割するならば、我々の方法は幾何学的厳密さを有する。というのは、実際に

$$\rho''' = \mathrm{M}\rho'$$

が成り立つからである。

しかしこの式が完全に妥当するのは極めてまれなので、本来は

$$\rho''' = (\mathrm{M} + v)\rho' + h$$

となろう。すでに彗星軌道を大まかには知っているのだから、ここでは $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{h}$ の値を求めればよい。』

そして、オルバースは、互いに余り離れていない 3 個の観測の場合における軌道改良の計算方法を論ずるが、その限界について次のように述べる。

『　　§63

これは、見ての通り、彗星の軌道要素に関する最初の計算を改良する、非常に簡単な方法である。そして、互いに余り離れていない 3 個の観測から得られるのと同程度の精確さで軌道要素を決定することができる。しかし、互いに近い観測によったのでは、彗星の軌道を精確に求めることは決してできない。それは 1 つには、すべての観測は種々の原因から常に瑕疵を含んでいるからであり、また 1 つには、このことはめったに顧慮されないようだが、我々は未だ太陽の黄経を秒の単位まで精確に計算できないからである。少なくともドゥ・ランブル氏以前はそうであったし、フォン・ツァッハ氏の新たな努力はなお不十分である。太陽の黄経の不確かさや誤差が 10 秒あると、或る状況の下では、彗星の黄経・黄緯の観測に 1 分あるいは数分の誤差以上の重大な結果を及ぼす可能性がある。計算者は、各観測ごとに適切な注意を払って太陽の位置を求めるべきである。太陽の黄経や地球との距離あるいは観

測された彗星の黄経・黄緯に関する誤差は、もちろん、観測が互いに近いほど、そして経過時間中に描かれた彗星軌道部分が小さいほど、彗星軌道の決定要素に大きな影響を与える。』

次にオルバースは 3 個の観測が互いに離れている場合の軌道改良法を考察する。これについて、彼は、ランベルトの方法、ラプラスの方法及びニュートンの方法があるが最初の 2 つは計算が長大であると評し、ニュートンの方法を推奨する。そして、ニュートンの方法を使う場合に解かなければならない問題を簡単に解くやり方を提案する。その中には現在、「オルバースの大円」と呼ばれる注目すべきアイデアが見られるので、その部分を以下に紹介しよう。

『 §68

この方法がいかに快適で役に立つとしても、私は、近日点通過時刻と近日点距離の代わりに昇交点黄経と軌道傾斜角を 3 個の仮定の基礎に置くというニュートンの方法に簡潔さと使いやすさを認めることができると思う。また、ラプラスの方法より本質的に優れていると思う。私はこの方法をニュートンの名で呼ぶが、それは、オイラーがこの方法は自分が発見したと述べたとき、彼はニュートンの著作を読んだことを忘れていたという記憶間違いがあったからである。この方法は、ニュートンが最初に述べ、そしてグレゴリーが詳しく説明した。近時の多くの著者たちは、ニュートンには触れないで、オイラーのみに言及している。

§69

通常、このニュートンの方法は、彗星の楕円軌道要素を求めようとする場合にのみ使うべきであると考えられている。ひとたびかかる見返りのない作業を目指そうとするならば、この方法を最も快適に適用できるけれども、この作業から信頼できるものが得られることはめったにない。しかし、この方法は、或るずっと短いやり方で、放物線軌道要素の改良に役立つのである。Struyk もまた、美しいランベルトの定理をまだ知らなかったので、不必要に長く、また余計な計算をしながら、この方法を使った。私は既に 17 年前に、ほとんど何の機械も用いない観測に基づいて 1779 年の彗星の軌道要素を計算するために、このニュートン法を手短に利用した。

§70

この方法を用いる際には、次の課題が現れる。それは、彗星軌道の黄道に対する角度及び彗星の地心黄経と地心黄緯が与えられて、太陽から見た彗星と昇交点のなす角及び彗星の日心距離を求めることである。ニュートンはこの解法を既知と仮定した。グレゴリー、オイラーと Struyk はその解法を述べた。レクセル氏は自身の論文において、そして最終的には Nordmark 教授が或る学報において、この解法に役立つ諸公式をできるだけ簡潔で使いやすくするよう努めた。しかし、従来行われていたよりも、もっと快適にこの課題

を解くことができるように私には思われる。というのは、常に平面 3 角法のみが使われていた。しかるにこの課題は明らかに球面 3 角法に属する。というのは、ここで2つの平面の相互位置関係が問題になる。第1の平面は太陽、地球及び彗星の中心によって決定される。もう 1 つの平面は、昇交点・降交点と軌道傾斜角によって与えられる、彗星の軌道平面である。

§71

(図 3)

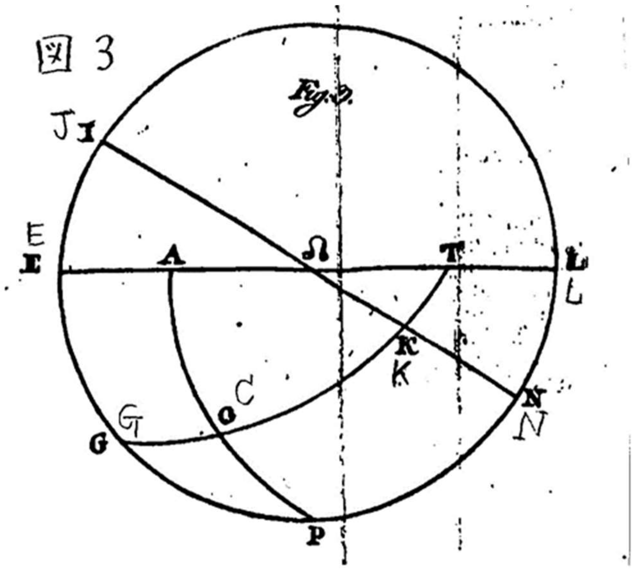

図 3 で、EAΩTL は黄道、Ω は降交点の位置とする。JΩN は太陽から見た彗星の軌道であり、T は地球の位置、C は彗星の観測された地心位置とする。T と C を通る大円 TKCG を引くと[44]、K は彗星の日心位置、ΩK は太陽から見た彗星と Ω のなす角、TK は太陽から見た彗星と地球のなす角、KC は彗星、太陽、地球から成る 3 角形において彗星を頂点とする角、そして最後に TC の補角は地球から見た彗星と太陽のなす角、となる。容易に分かるように、これらすべての要素は、2 個の球面 3 角形を解いて得られる。

1) 直角 3 角形 ACT において、TA は彗星の地心黄経と地球の黄経の差であり、AC は彗星の観測された黄緯である。

$$\text{I}.\quad \cos TC = \cos TA \ \cos AC$$

及び

$$\text{II}.\quad \cot ATC = \cot AC \ \sin TA$$

によって、TC と ATC が求められる。

2) 鋭角 3 角形 ΩKT において、ΩT は降交点黄経と地球の黄経の差であり、角 TΩK は彗星の軌道傾斜角であり、そして角 ΩTK は角 ATC に等しい。ΩK と TK は次の公式で求められる。

Ⅲ. $\tan\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{K}+\mathrm{TK})=\frac{\cos\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{TK}-\mathrm{T}\Omega\ \ )}{\cos\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{TK}+\mathrm{T}\Omega\mathrm{K})}\tan\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{T})$

Ⅳ. $\tan\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{K}-\mathrm{TK})=\frac{\sin\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{TK}-\mathrm{T}\Omega\mathrm{K})}{\sin\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{TK}+\mathrm{T}\Omega\ \ )}\tan\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{T})$

これにより、KC = TC − TK も決定される。そして、通例通り、R を地球と太陽の距離、r を彗星と太陽の距離とすると、次のようになる。

Ⅴ. $r=\frac{\mathrm{R}\sin\mathrm{TC}}{\sin\mathrm{KC}}$

§72

これらの公式は、従来使用されていた諸式と比較すると、特に彗星軌道の改良に用いる場合、その優れた快適さが明白になる。例えば、オイラーは「1769 年彗星の真の楕円軌道に関する考察」において 8 個の公式を用いているが、我々は 5 個で足りる。オイラーの場合、昇交点黄経と軌道傾斜角に関して設定した 3 つの仮定のそれぞれについて、この 8 個の式を計算しなければならない。しかし、我々の場合、3 つの仮定すべてについて 1 番目と 2 番目の公式及び 5 番目の式の分子は同じで変わらない。それに加えて、2 つの仮定については、$\tan\frac{1}{2}(\Omega\mathrm{T})$の係数が同じである。オイラーは 1 つの観測につき 75 個の対数を書き出す必要があったが、我々は 43 個のみですむ。レクセルと Nordmark はおよそ 57 個から 60 個で足りる。』

以上が、オルバースの軌道改良計算法の骨子である。彼が幾つかの実例で示しているように、彼の方法は彗星の放物線軌道について従来よりもずっと容易でかつ精確な計算方法を与えるものであった。すなわち、放物線の軌道計算方法については、彼の 1797 年書をもって一応の完成を見たということができる。

第 3 章　ガウスの軌道計算法(その 1)

1. 序

前章までにみたように、18 世紀末までには、3 個の観測から彗星の放物線軌道を計算する理論は概ね完成していた。しかし、彗星の描く軌道が楕円の場合は事情が全く異なっていた。それまでも、観測の数が多い場合には、種々の工夫をこらして彗星の楕円軌道をかなり正確に計算することが全くできなかったわけではない。レクセルによる 1770 年彗星（レクセル彗星）の軌道計算はその成功例である。しかし、3 個の観測が与えられたときにその楕円軌道を計算する一般的な方法は 18 世紀中には知られていなかった。

この限界を乗り越えたのがガウスである。彼は、1801 年に発見された小惑星ケレスの楕円軌道を正確に計算することに成功し、彼の予測に基づいて実際にケレスが再発見された。しかし、それによって天文学者たちが直ちに楕円軌道の計算方法を会得したわけではない。ガウスはその軌道計算方法をさらに改良し、より一般的な理論に高めるためにさらに数年を費やし、1809 年に刊行された著書『天体運動論』[45]においてようやく自己の軌道計算方法を明らかにした。

この『天体運動論』の紹介は後の第 6 章で行うこととし、本章では、1801 年から 1804 年頃までガウスが用いていた初期の軌道計算法について考察する。

2. ケレスの発見

イタリアの天文学者ジュゼッペ・ピアッツィ(Giuseppe Piazzi. 1746-1826)は、1801 年 1 月 1 日に未知の星（8 等星程度）を発見した。彼はこの星がかねてから天文学者たちの探索していた火星と木星の間にある惑星だと考え、ケレス（Ceres. 当初は Ceres Ferdinandea）と命名した。その観測は、1801 年 1 月 1 日から 2 月 11 日まで行われ、19 回の観測データが得られた。その後、この星は観測網から消え、次にいつどこに現れるか全く分からなくなった。この新惑星の発見は世間の注目を浴び、ケレスを再発見できるかが世界的な関心の的になった。

ピアッツィの観測データはツァッハが編集・発行していた月刊雑誌「地球及び天空に関する学問の発展のための月刊報告」(*Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde*)（以下『月報』又は *MC* と略す。）の 1801 年 9 月号に掲載された。以前から天文学に興味を持っていたガウスは、1801 年 9 月にこの問題に取り組み始め、たちまちケレスの軌道計算に成功した[46]。ガウスは自己の計算結果をツァッハに送り、ツァッハは『月報』1801 年 12 月号でそれを世に紹介した。

3. ガウスによるケレスの軌道計算

『月報』1801 年 9 月号に掲載された、ピアッツィによるケレスの観測結果は次の通りである。

観測時刻（パレルモ平均時）	地心黄経	地心黄緯（南）
1801 年 1 月　1 日 8 時 43 分 17.8 秒	53° 22' 58"3	3° 06' 42"1

1月　2日8時39分04.6秒	53° 19' 44"3	3° 02' 24"9
1月　3日8時34分53.3秒	53° 16' 58"6	2° 58' 09"0
1月　4日8時30分42.1秒	53° 14' 15"5	2° 53' 55"6
1月 10日8時06分15.8秒	53° 07' 59"1	2° 29' 00"6
1月 13日7時54分26.2秒	53° 10' 37"6	2° 16' 59"7
1月 14日7時50分31.7秒	53° 12' 01"2	2° 12' 56"7
1月 19日7時31分28.5秒	53° 25' 59"2	1° 53' 38"2
1月 21日7時24分02.7秒	53° 34' 21"3	1° 46' 06"0
1月 22日7時20分21.7秒	53° 39' 01"8	1° 42' 28"1
1月 23日7時16分43.5秒	53° 44' 15"7	1° 38' 52"1
1月 28日6時58分51.3秒	54° 15' 15"7	1° 21' 06"9
1月 30日6時51分52.9秒	54° 30' 09"0	1° 14' 16"0
1月 31日6時48分25.4秒	54° 38' 07"3	1° 10' 54"6
2月　1日6時44分59.9秒	54° 46' 19"3	1° 07' 30"9
2月　2日6時41分35.8秒	54° 54' 57"9	1° 04' 10"5
2月　5日6時31分31.5秒	55° 22' 43"4	0° 54' 28"9
2月　8日6時21分39.2秒	55° 53' 29"5	0°45' 05"0
2月 11日6時11分58.2秒	56° 26' 40"0	0° 36' 02"9

『月報』1801年12月号のツァッハの記事によれば、ガウスは幾つかのデータを選んで計算を繰り返すが、最終的には1月1日、1月21日及び2月11日の3個のデータに基づいて、次のような軌道要素を算出した。

遠日点・・・・・・・326° 27' 38"
昇交点黄経・・・・・81° 00' 44"
軌道傾斜角・・・・・10° 36' 57"
長半径の対数・・・・0.4420527
離心率・・・・・・・0.0825017
平均日々運動・・・・770".914
(＝公転周期約4.6年)

ガウスは、この軌道要素に基づき、1801年11月25日から12月31日までのケレスの6日おきの位置を次のように予想した（パレルモで観測する場合）[47]。

パレルモ時間の夜12時	地心黄経	地心黄緯（北緯）
1801年 11月25日	170° 16′	9° 25′
12月 1日	172° 15′	9° 48′
7日	174° 07′	10° 12′
13日	175° 51′	10° 37′
19日	177° 27′	11° 04′
25日	178° 53′	11° 32′

31 日	180° 10′	12° 01′

4. ケレスの再発見とその結果

ツァッハは、1801 年 12 月 7 日に、ガウスが計算・予測した場所に 8 等星前後の星が観測されることを見出した。また、オルバースも 1801 年 12 月 31 日にこの星の観測に成功し、これがケレスであることを確認した。

ツァッハは『月報』1802 年 2 月号にこのニュースを掲載し、その中で自分及びオルバースの見解として、この再発見はガウスの功績に帰せられるべき旨を明言した [48)]。

以上に至る経過について、ガウス自身はその著書『天体運動論』の序言の中で次のように述べている [49)]。

> 1801 年 9 月、私はその時、全く別の仕事に従事していたが、上述の大きな問題の解決に役立つと思われる幾つかのアイデアが突然頭に浮かんだ。（中略）というのは、その頃、1801 年 1 月 1 日にパレルモの観測所で発見された新しい惑星についての噂が万人の話題となっており、ほどなく高名なピアッツィが 1 月 1 日から 2 月 11 日まで遂行した観測自体が一般に知られるに至った。これほどの重要な機会は天文学の記録のどこにも全くなかった。この問題の価値をこの上なく明瞭に示すのにこれ以上の重要なものはほとんど想像できなかった。ほとんど 1 年も経ってから無数の星の空の中で惑星のアトムを再び見つけたいという希望は、すべて、極めて少数の観測のみに基いて軌道の十分な近似値を知ることができるかにかかっていた。そのような切迫した緊急性と必要性が当時存在していたのである。私のアイデアが実際的な用途についてどの程度の力を持っているかを試すのにケレスの軌道決定以上に好都合なものがかつてあっただろうか？　この惑星の場合、41 日間で描いた弧の地心角はわずか 3 度であり [50)]、1 年経過後にそこから非常に離れた天空の区域で発見しなければならなかったのである。この方法は 1801 年 10 月に初めて適用されたが、そこから導かれた数字に従って探索が行われた最初の晴れた夜に、この行方不明の惑星は再び観測網に捕らえられた。その後に発見された他の 3 個の惑星を通じて、この方法の効果と一般性をテストし承認する新たな機会が得られた。

ガウスの軌道計算は、1802 年 3 月にオルバースが発見した 2 番目の小惑星パラスの観測においても有効であることが立証され、ガウスの名声は揺るがぬものとなった。そして、オルバースの尽力等もあって、ガウスはゲッティンゲン大学の新設の天文台の台長に就任することが決まった（実際の着任は 1807 年）。

ガウスが 30 歳にしてこのように一応の安定した地位を得るに至った直接の契機が、彼の歴史的大著『整数論』の刊行よりも、むしろケレスの軌道計算の成功にあったことは否めないと思われる。

5. パラスの発見とその軌道要素の計算

1802年3月28日にオルバースは新規の天体を発見して、パラスと命名した。当初、その天体は彗星なのかケレスと同様の小惑星なのか判然としないという見解もあったが[51]、間もなく小惑星であることが明確になった。

ガウスは、ツァッハやオルバースらの4月4日から5月1日までの観測に基づき、パラスが楕円軌道を描くことを見出して、その軌道要素（第1）を次のように算定した[52]。

パラスの軌道要素（第1）

[日心弧=4°11'. 順行の楕円軌道]

元期(1802年3月31日正午、ゼーベルク)・・	166°01'37".2
平均日々赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・	800.770"
周期 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	1618.5日
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・	0.4310494
遠日点黄経(元期時の恒星位置による) ・・・	304°36'30"
昇交点黄経(元期時の恒星位置による) ・・・	172°09'58"
離心率 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・	0.215708
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・・・・・	33°39'16".6

この軌道要素で計算した場合、観測との誤差は、4月24日までは赤経・赤緯とも5〜7秒以内に収まるが、その後次第に増大し、4月29日から5月1日までの赤経の誤差は20秒を超えた[53]。

次に、ガウスは、同じ観測の中からツァッハによるデータのみを抜き出して軌道要素を計算した。これにより得られたパラスの軌道要素（第2）は次のようになった[54]。

パラスの軌道要素（第2）

[ゼーベルクにおける27日間の観測による]

元期(1802年3月31日正午、ゼーベルク)・・	161°12'43".2
平均日々赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・	757".166
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・	0.4472636
遠日点黄経(恒星位置による) ・・・・・・・	300°05'04"
昇交点黄経(恒星位置による) ・・・・・・・	172°34'35"
離心率 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・	0.2591096
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・・・・・	33°00'42"

この新たな軌道要素で計算すると、4月4日から5月11日までの観測との誤差はほとんど数秒以内に収まり、10秒を超えたのは5月1日の赤緯と5月11日の赤経・赤緯のみという良好な結果が得られた[55]。

引き続いて、ガウスは、ロンドンにおける観測も取り入れて、4月4日から5月16日までの諸観測に基づき新たな軌道要素（第3）を次のように算定した[56]。

パラスの軌道要素（第 3）
[ゼーベルクとグリニッジにおける 42 日間の観測による]

元期(1802 年 3 月 31 日正午、ゼーベルク)・・	162°25'45".9
平均日々赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・	769".547
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・	0.4425664
遠日点黄経(恒星位置による) ・・・・・・・	300°58'47".7
昇交点黄経(恒星位置による) ・・・・・・・	172°28'17".9
離心率 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・	0.2476402
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・・・・・	34°39'10".7

この軌道要素（第 3）で計算すると、4 月 4 日から 5 月 16 日までの諸観測との誤差の多くは 5 秒以内に収まっている [57]。また、上記の軌道要素（第 2）では 5 月に入ってからの観測との誤差が増大する傾向があったが、この軌道要素（第 3）ではそのような傾向も見受けられなかったので、より精確になったと評価してよいであろう。

その後、ガウスは 1802 年中にパラスの第 4 番目 [58]及び第 5 番目 [59]の軌道要素を計算し、1803 年には第 6 番目 [60]の、1804 年には第 7 番目 [61]の軌道要素を算定した。

6. 1802 年論稿の存在とその内容

上記のようにガウスはケレスに続いて発見された第 2 の小惑星パラスについてもその軌道要素を直ちに計算することができ、その位置を精確に予想したので、ケレスの軌道予想も決して偶然に当たったのではなく、ガウスが小惑星の楕円軌道を短期間の観測に基づいて計算する能力を有することは誰の目にも明らかになった。しかし、ケレスやパラスの楕円軌道について、ガウスはその軌道要素を示しただけで、そのための計算方法を明らかにしたわけでない。ガウスは 1809 年に刊行された『天体運動論』の中で 3 個の観測から楕円軌道を決定する計算方法を説明している。しかし、1801 年から 1802 年にかけてケレスやパラスの軌道を計算したときの方法はそれとはかなり異なることをガウス自身が『天体運動論』の序言で明言している [62]。

そこでガウスがケレスやパラスの軌道の計算のために用いた方法がどのようなものであったかが問題になる。この点については、各種の資料を総合すれば、相当程度の把握が可能と思われる。以下それを見よう。

(1) 自筆ノートの遺稿

『全集』第 11 巻第 1 分冊には、楕円軌道に関するガウスの遺稿が収録されている [63]。それらの遺稿は編集者によって 3 つの項目に整理されている。

最初の項目は「I 天体の軌道の決定」と名付けられ、9 個の草稿から成る [64]。そこでは、3 個の観測から天体の楕円軌道を算出するためにガウスが案出した必要な諸公式がほぼすべて挙げられている。

2 番目の項目は「II 軌道決定の続き」とされ、7 個の草稿から成る [65]。ここで

は、前項目「Ⅰ」で展開された一般論にピアッツィによる観測データを当てはめてケレスの軌道要素が算定されている。
最後の項目は「Ⅲ ケレスの軌道決定に向けて」とされ、前記の「Ⅰ」で示した軌道改良法をケレスの軌道計算に適用し、第3次の軌道要素を算出している[66]。
なお、全体の末尾にはBrendelによる注釈が掲載されている[67]。これらの遺稿のほとんどは1801年秋に書かれたものと考えられている[68]。これらの遺稿は当時の『月報』に掲載されたガウスの計算結果や後述の1802年論稿の内容とよく一致しており、この頃のガウスの軌道計算法の概略を示していると考えて差し支えない[69]。

(2) オルバースとの書簡集

オルバースはガウスが予測した位置にケレスを再発見し、ガウスの軌計算の正しさを立証した人物であり、ガウスが一躍世に知られるようになった恩人ともいうべき存在である。そのためガウスは1802年初頭以来、オルバースと頻繁に書簡をやりとりして天文関連情報の交換等を行うようになった。それらの書簡の中には『全集』に収録されていない貴重な情報も含まれており、ガウスの初期の軌道計算法を知る一助となる[70]。
1802年8月6日付の書簡で、ガウスは新惑星の軌道計算法を概説した草稿をオルバースに送った[71]。ガウスは、急いで書いたので清書もせずに下書きのまま送付するが、後に返却してもらうかもしれないと断っている[72]。この草稿が次に述べる1802年論稿であるが、これはガウスの初期の軌道計算法をかなり明確に示した重要な資料である。この書簡の中で、ガウスは、この草稿を公表するにはどのような方法がいいだろうかとオルバースに尋ねている[73]。つまり、この時期にガウスは自己の軌道計算法を公開してもよいつもりだったことがうかがえる。
これに対し、オルバースは1802年8月18日付の書簡[74]で返事をしているが、そこではガウスの草稿を完全に理解するのは自分にとって難しいこと、したがって公表の方法についてもまだ回答できないこと等が述べられている[75]。その後、オルバースは1802年9月11日付の書簡で軌道計算法の速やかな公開を勧めているが[76]、公表の具体的な方法については触れていない。また、オルバースは同じ書簡でガウスの草稿について13点の疑問点を挙げて[77]、ガウスの教示を乞うているが、それに対してガウスは、1802年9月14日付[78]及び同月21日付[79]の2通の書簡で詳細な回答を送っている。
上記(1)の遺稿およびこれらの書簡を検討すれば、ガウスが1802年論稿に記された方法によってケレスとパラスの軌道計算を行ったことは一層明瞭であると言えよう。

(3) 1802年論稿

上記のようにガウスは1802年8月6日付の書簡と共にケレスやパラスの軌道計算方法を説明した草稿(以下「1802年論稿」という)をオルバースに送った。1802年論稿は、結局公表されることなく、その後ガウスに返却され、そのままになっていた。後にベルンハルト・フォン・リンデナウ(Bernhard von Lindenau, 1780-1854. ザクセン＝ゴータ＝アルテンブルク公国の枢密顧問官も務めた法律

家・天文学者。1807年からツァッハの後を継いで『月報』の編集長を務めた）がたまたまその存在を知り、ガウスの承諾を得て『月報』1809年9月号に掲載した[80)]。

1802年論稿が書かれたのは、ケレスの軌道決定から9か月以内、パラスの軌道決定から4か月以内の時点であり、ケレスやパラスの軌道決定の方法が概ねそのまま記されていると考えてよい。

ガウスは、1802年論稿において、軌道決定の方法が満たすべき要請として、

①3個の完全な観測から軌道を計算できること

②そうして得られた軌道の計算値と実際の観測との差をできる限り小さくするように軌道を改良できること

の2つを挙げている[81)]。そして、①については、第1の要点として「2個の両端の地心距離の近似的な決定」を、また、第2の要点として「軌道要素の近似的な決定」を挙げて検討している[82)]。

第1の要点については、まず基礎的な諸量の間の関係式を多数提示した上で、2番目の観測時における天体の日心距離と地心距離を求める公式を引き出す[83)]。この公式は種々の近似を施した上で得られた非厳密的なものであるが、近似的な解を得るには十分であり、ガウスはこの公式が彼の方法全体の中で最も重要な部分だと述べている[84)]。

第2の要点については、近似的に得られた2個の両端の地心距離を用いて、まだ未決定の軌道要素すなわち長半径、離心率、遠日点黄経、元期を近似的に求める方法を検討する。ガウスのその方法として3通りのものを挙げている。

すなわち、第1の方法では、天体の遠日点黄経を既知と仮定し、半パラメータ[85)]を2通りのやり方で計算する。そしてそこから得られる2通りの平均経度が一致しない場合には一致するまで遠日点黄経の値を少しずつ変化させる。最終的に両者が一致すればそこが求める遠日点黄経の値となる[86)]。

第2の方法では、離心率を既知と仮定して半パラメータを2通りのやり方で計算する。以下は第1の方法と同様である。ガウスによれば、第1の方法の方が第2の方法よりも優れているが、そもそもどちらの方法も、弧全体が非常に大きくて軌道要素が既におおよそ分かっている場合にのみ有効であり、短期間の観測から最初の近似を求める場合には、常に次の第3の方法によるべきだとされる[87)]。

第3の方法では、半パラメータの値を既知と仮定し、所要の公式を用いて遠日点黄経及び離心率を計算する。そして第1の方法又は第2の方法に従って軌道要素を算出する[88)]。この第3の方法の長所は、天体の描く弧が余り大きくないときは、真に近い半パラメータの値がすぐに得られることである[89)]。

さて次に、本稿の後半部分である上記の②すなわち軌道改良の方法については、種々の考察結果が示されている。まず1つの方法として、同じ観測値を用いて軌道改良を試みる場合には、2番目の観測時について算出された観測値との誤差分をあらかじめその観測値から差し引き、それを新たな観測値として軌道計算をし直す、というやり方が紹介される。このやり方はかなり容易であり、ガウスの経験によれば2番目の観測時における黄経・黄緯について1秒の数分の1の誤

差しか生じなかったという[90]。

しかし、後日に別の観測データが得られた場合には、それを考慮に入れて軌道改良を試みることになるであろう。そのような場合の軌道改良のやり方として、ガウスは次の諸方法を挙げている[91]。

方法Ⅰは、最初に2個の両端の観測時における近似的な距離を仮定する。そして2個の距離のうちの1個を少し変え、次に他の距離の方を少し変える。これら3組の仮定すべてから得られた3通りの軌道要素に従って、2番目の観測時の位置を計算する。そしてそれを観測データと比較し、補間法を用いて、修正された距離を求める。それに基づいて修正された軌道要素を求める。

方法Ⅱ[a]は、上記と同じ手順を用いるが、両端の観測における近似的な距離の代わりに、軌道傾斜角と昇交点黄経の近似的な決定を用い、両端におけるそれらの値を少し変える点が異なる。

方法Ⅱ[b]は、軌道傾斜角と昇交点黄経の近似的な決定及びそれらを少し変えた値とを合わせ用い、3個の地心位置から3個の日心位置を計算する。すなわち、2個の両端の日心位置から軌道要素を計算し、そこから中間の日心位置を計算して、それを地心観測データから導かれた値と比較する。次いで、補間法を用いて、改良された軌道傾斜角と昇交点黄経を求める[92]。

以上の諸方法のうち、ガウスは、自分の度重なる経験によれば、方法Ⅰが最も目的適合的かつ普遍的であると評している[93]。

なお、ガウスは最後に「観測が既に数年間に及び、その軌道要素が微小な所まで決定されている場合には、任意の個数の観測を基礎に置くことができる微分変化を使うのが最良の手段と考える。」と述べている[94]。これは最も精確な軌道を求める場合に最小二乗法を用いる趣旨であると解され、極めて注目に値する。

(4) 総括

以上述べた(1)～(3)の諸資料を総合すれば、ガウスがケレスやパラスの軌道計算に際して用いた計算法の概要が大体分かると評価してよい。そして、その計算法の具体的内容を『天体運動論』が示す計算法と比較するならば、ガウス自身が『天体運動論』で述べているように両者は全く異なることが明白に理解されるであろう。

7. 1804年彗星について

これまで見てきたケレスやパラスの軌道計算は楕円軌道の計算であった。そしてガウスが当時用いた計算方法がケレスやパラスという小惑星の軌道について相当精確な値を与えたことは既に述べた通りである。そこで、それと対比するために、彗星の放物線軌道についてガウスはどの程度の精確さで軌道計算を行ったかをここで見ておこう[95]。

マルセイユ天文台のジャン＝ルイ・ポン(Jean-Louis Pons, 1761-1831)は1804年3月7日に或る彗星を発見した。続いて、パリ天文台のアレクシス・ブヴァール(Alexis Bouvard, 1767-1843)やブレーメンのオルバースも独立に同じ彗星を発見・観測した。ガウスは1804年3月12日から同年4月1日までの計10個の観測に基づいて、この彗星の放物線軌道の軌道要素を次のように算定した。

近日点通過時刻・・・・・・・・・1804年2月13日14時49分51秒
（ゼーベルク平均時）
近日点距離の対数・・・・・・・・0.0298575(= 1.0711678 AU)
近日点経度　・・・・・・・・・・148°44' 51" (平均分点より計測)
昇交点黄経　・・・・・・・・・・176°47' 58" (平均分点より計測)
軌道傾斜角　・・・・・・・・・・ 56°28' 40"
運行　・・・・・・・・・・・・・順行

そして、この軌道要素に従って算出した赤経・赤緯を実際の観測値と比較した場合の誤差は次のようになった。

1804年	ブレーメン平均時	赤経の誤差	赤緯の誤差
3月12日	12時56分13秒	＋ 9"	0"
13日	11時40分43秒	－ 19"	－ 7"
14日	12時22分26秒	＋ 22"	＋ 92"
15日	8時54分41秒	－ 31"	－ 79"
20日	9時22分52秒	－ 247"	＋ 121"
22日	8時59分13秒	－ 143"	＋ 85"
27日	8時59分43秒	－ 55"	－ 152"
28日	8時28分02秒	－ 27"	＋ 32"
29日	8時45分41秒	－ 26"	＋ 33"
4月1日	9時01分52秒	＋ 28 "	－ 1"

なお、3月20日の観測値については、観測者であるオルバース自身が信頼性は低いと述べている[96)]。この比較に際して、ガウスは章動、光行差、視差を考慮したとしている。この誤差を見ると、2～3の例外を除いて、赤経は30秒以下、赤緯は90秒以下に収まるものが多く、まずまず良好な精度と言えよう。ガウスはオルバースに宛てた書簡の中でこの放物線軌道の計算はオルバースの方法に従って行った旨を明言している[97)]。したがって、1797年書で述べられたオルバースの放物線軌道の計算方法の精度は、観測データの処理を適切に行えば、緯度・経度の誤差を概ね1分程度に抑えることができるものであったと見てよいのではないかと思われる。

第 4 章　1805 年第 1 彗星（エンケ彗星）について ―― ベッセルの登場

1. ベッセルの経歴

フリードリヒ・ヴィルヘルム・ベッセル(Friedrich Wilhelm Bessel, 1784-1846)は、1784 年にヴェストファーレン地方のミンデンで公務員の子として生まれた。高等教育を受けることなく、14 歳でブレーメンの貿易会社に就職したが、1802 年頃に、同市で開業医をしていたオルバースの知遇を得た。オルバースから天文学の指導を受けたベッセルはたちまちその才能を発揮して、1805 年頃から種々の天文学関係の論稿を発表するようになった[98)]。そして、1810 年にはケーニヒスベルクの天文台長に任命され、終生その地で天文学者・数学者として活躍した。

2. 1805 年第 1 彗星の発見

1805 年 10 月 20 日早朝にフランクフルト・アン・デル・オーデル在住のヨハン・フート(Johann Sigismund Gottfried Huth, 1763-1818)は彗星を発見し、その観測データを 10 月 22 日付の書簡及び 10 月 27 日付の書簡でツァッハに送った。マルセイユ天文台のポンも 10 月 20 日にこの彗星を発見し、同天文台長のジャック・ヨゼフ・テュリ(Jacques Joseph Claude Thulis, 1748–1810)が 10 月 20 日から 11 月 10 日までの 14 個の観測データをツァッハに送った。また、パリ天文台のブヴァールも同じく 10 月 20 日にこの彗星を発見した。ツァッハはこれらの情報を直ちに『月報』1805 年 11 月号に掲載した[99)]。なお、この彗星は、その後 1819 年になって、エンケにより公転周期 3.3 年の周期彗星であることが確認され、エンケ彗星と呼ばれるようになる[100)]。

オルバースは、この彗星の軌道要素の計算をベッセルに依頼し、その結果を 12 月 7 日付の書簡でツァッハに送った。ツァッハはその内容を『月報』1806 年 1 月号で公開した[101)]。

ガウスは、自身の計算した軌道要素を 12 月 5 日付の書簡でツァッハに送り、その内容は『月報』1806 年 1 月号に掲載された[102)]。ガウスは、フートやテュリの観測データの精度が低いようだと感じており、自分の算出した軌道要素も余り当てにならないと断っている。

以上のように、この彗星の観測は何人もの天文学者によって行われたが、1805 年末頃までにこの彗星の軌道要素を計算してツァッハに報告できたのは、ベッセルとガウスのみであった。また、この時点では、この彗星が楕円軌道を有する周期彗星でないかと考えた者はいなかった模様である[103)]。

第5章　1805年第2彗星（ビエラ彗星）について

1805年11月10日にポンは前月の彗星（エンケ彗星）とは別個の彗星を発見した。続いて、11月16日にはブヴァールが、また11月22日にはフートが同じ彗星を発見した。なお、この彗星に関しては、1826年に至りヴィルヘルム・フォン・ビーラ(Wilhelm von Biela, 1782-1856)が周期6.6年の周期彗星であることを発見し、それ以後、ビエラ彗星と呼ばれるようになる[104)]。

テュリはポンの観測データを1805年11月14日付の書簡でツァッハに送った。フートは11月24日と12月2日に書簡をツァッハに送り、自己の観測データを伝えた。またオルバースはツァッハに宛てて12月7日に書いた書簡で自己の観測データを知らせるとともに、他者の観測データをも勘案してベッセルが計算した軌道要素を伝えた。また、ツァッハが12月25日にオルバースから受領した書簡には、その後の観測結果やベッセルによる改良された軌道要素が記されており、また、この彗星の軌道が1772年に目撃された彗星と似ていることが指摘されていた。

ガウスはこの頃、ツァッハ宛の書簡（日付不明）において、自己の12月8日の観測データを知らせ、また他者の観測データと合わせて自分が計算した軌道要素を示した。その後、ガウスはこの彗星の軌道要素について、ツァッハ宛に5月20日付及び7月8日付の書簡を送っており、また『ベルリン天文年鑑』の編集者であったヨハン・ボーデ(Johann Elert Bode, 1747-1826)宛てに3月14日付の書簡を送っている。それぞれの書簡からうかがわれる内容は概ね次の通りである。

a) ツァッハ宛の1805年12月頃の書簡[105)]

ガウスは、1805年12月8日の自分の観測データと、フランスの「世界報知新聞」(Le Moniteur universel)に掲載された11月16日のブヴァールの観測データおよび12月2日のオルバースの観測データに基づいて、この彗星の放物線軌道の軌道要素を、近日点通過＝1805年12月31日 7時20分39秒(ゼーベルク時間)、近日点経度＝109°23'40"、昇交点黄経＝250°33'14"、軌道傾斜角＝16°33'33"、近日点距離＝0.8917594AU、順行、と計算した。ここではまだ1772年彗星との類似性について言及していない。

b) ボーデ宛の1806年3月14日付の書簡[106)]

ガウスは、ツァッハ経由で得たテュリの新たな観測データ及び新聞で報じられたグリニッジ天文台長ネヴィル・マスケリン(Nevil Maskelyne, 1732-1811)の12月8日の観測データを勘案して、軌道要素を改良した。改良後の軌道要素に基づく計算値と全19個の観測データとの誤差は、赤経につき＋2'12" ～－2'30"、赤緯につき＋2'44" ～－1'12"の範囲に収まっている。この彗星の軌道は1772年発見の彗星と似ているが、ガウスは、特に近日点距離等においてかなりの相違がある旨を指摘し、この彗星の軌道が楕円かどうかや両者が同一の彗星かどうかについては断定を避けている。

c) ツァッハ宛の1806年5月20日付の書簡[107)]

ガウスは、21個の観測データを基に、放物線軌道を仮定した場合の軌道要素と楕円軌道を仮定した場合の軌道要素とを算出した。楕円軌道については、近日点

通過＝1806年1月2日11時8分45秒(ゼーベルク時間)、近日点経度＝109°30'2".3、昇交点黄経＝251°28'22".5、軌道傾斜角＝12°43'10".0、軌道長半径＝2.8222059 AU、日々平均運動＝748.383秒、周期＝1731日17時間(＝約4.74年)、離心率＝0.6769242、遠日点距離＝4.732625 AU、近日点距離＝0.911786 AU、と算出した[108]。また、両者の軌道における計算値と観測値とを比較すると、放物線軌道の場合は±2°の範囲に差異が分布するが[109]、楕円軌道の場合は精度に疑義のある数個のデータを除くとほとんどが±50"以内に差異が収まっている[110]。このような事情を考慮して、ガウスは、断定は避けつつも、この彗星の軌道は楕円である可能性が高い旨を示唆した。

この彗星が周期彗星だとすると、軌道が似ている1772年の彗星と同一かという問題がある。もしこれが肯定されると、その周期は約33年11月かあるいはその数分の1ということになる。但し、木星等への大接近による軌道変更の可能性も否定はできないので、両者の軌道についてはまだ結論を下さない、とガウスは述べている。

d) ツァッハ宛の1806年7月8日付の書簡[111]

ブヴァールの新たな6個の観測データを上記c)で示した放物線軌道及び楕円軌道の軌道要素の計算値と比較すると、どの程度の差異が生ずるかを検証した。この観測データは視差等を補正する前のデータでもあり、ガウスは、放物線軌道と楕円軌道のどちらがこれらの観測値とより良く一致するかについては断定せず、もっと長期間にわたる観測データが必要だとした。

第6章　ガウスの軌道計算法（その2）

1.『天体運動論』の刊行

天体の軌道を計算してその結果を発表することは、必ずしもその軌道計算の方法を明らかにすることを意味しない。ツァッハが『月報』1801年12月号でガウスの軌道計算を世に急告した際も、計算結果や軌道要素が示されただけであり、その計算方法が詳しく説明されたわけではない。

当時の天文学界・数学界では、太陽の周囲を動く天体が円を描く場合と放物線を描く場合には観測データからその軌道を計算することができたが、楕円を描く場合の軌道の計算方法はまだ知られていなかった。ガウスは独自の方法を用いてその計算方法を案出したわけだが、その計算方法を公表して優先権を主張するよう勧められても、すぐには応じなかった[112)]。その間の事情をガウスは『天体運動論』の序言で次のように述べている[113)]。

> ケレスの再発見後すぐに何人もの天文学者たちが、私がこの計算に用いた方法を公表して権利主張をすることを望んだ。しかし、この友好的な申し出を実現させるには、当時、多くの障害があった。他にも諸仕事があったし、この問題をもっと十分に検討したいという希望もあった。特に、引き続きこの研究を進めれば解法の種々の部分の一般性、単純さ、エレガンスがより高まるだろうという期待があった。このような希望はほとんど誤っていなかったので、私はこの遅れを後悔する理由はないと思っている。当初用いた方法は何度も多くの修正を受けたので、かつてケレスの軌道を計算したときのやり方と本書で採用した仕組みとの間には、類似の跡がほとんど残っていない。

こうして、ケレスの再発見から8年近く経過した1809年に、ガウスは『天体運動論』を刊行し、自己の軌道計算法を世に公開したのである[114)]。

2.『天体運動論』の構成

『天体運動論』は全2部から成り、全体で192の節に分かれている。その大まかな内容は以下の通りである。

前半の第1部「太陽を回る天体の動きを決定する諸量の間の一般的な諸関係」（第1節～第114節）は4つの章から成る。

「第1章　軌道上の単一の場所に係る諸関係」（第1節～第46節）は、軌道平面のみに着目し、天体が或る1点にある場合にその位置や他の軌道要素等の間で成り立つ関係や等式を考察する（一種の平面幾何学と言える）。天体の軌道が楕円を描く場合のみならず、放物線あるいは双曲線を描く場合も取り上げられている（この点は次章以下も同様である）。

「第2章　空間中の単一の場所に係る諸関係」（第47節～第77節）では、空間における天体の位置を黄道面や天球に投影したり、太陽あるいは地球を原点とする3次元直交座標で表したりしつつ、それらの相互関係や軌道要素との関係等を考察する（球面幾何学及び立体幾何学と言える）。

「第 3 章　軌道上の複数の場所相互間の諸関係」(第 78 節～第 109 節) では、天体が占める位置を複数考えて、それらについて軌道平面上で成立する諸関係を考察する。例えば、動径 2 つと或る軌道要素から他の軌道要素を決定する方法などが示される。

「第 4 章　空間中の複数の場所相互間の諸関係」(第 110 節～第 114 節) では、軌道上の 3 つの点の座標を太陽を原点とする 3 次元直交座標で表して、そこから生ずる種々の関係式の数学的検討が行われる。

次に、後半の第 2 部「地球から見た観測に基づく天体軌道の考察」(第 115 節～第 192 節) は、以下の 4 つの章から成る。

「第 1 章　3 個の完全な観測に基づく軌道の決定」(第 115 節～第 163 節) は本書の中核ともいうべき部分で、観測により得られた天体の 3 個の経度・緯度からその軌道要素を計算する方法を示している (「完全な観測」とは「経度・緯度の両方の値が得られた観測」という意味である)。その計算の遂行に必要な諸量や補助計算の多くは既に第 1 部の各所で示されており、本章ではそれらを随時引用しながら議論が進められる。

「第 2 章　4 個中 2 個のみが完全な観測に基づく軌道の決定」(第 164 節～第 171 節) は、軌道傾斜角がゼロに近い場合等の軌道決定法を説明したものである。この場合には 4 個の観測データが必要となるが、未知数は 6 個で足りるので、観測時刻が最初と最後のものについては、緯度の数値を除外し経度の数値のみを使用して軌道の決定が行われる。

「第 3 章　何個の観測であれそれらを最も近似する軌道の決定」(第 172 節～第 189 節) は、前章までと異なり、観測データが多数ある場合にどのような軌道を採用すれば最も真の軌道に近いかという問題が取り上げられる。ここで有名なガウスの最小二乗法が紹介される。

「第 4 章　摂動を考慮に入れた軌道の決定について」(第 190 節～第 192 節) では、木星等の引力により生ずる天体の摂動にどう対処すべきかが手短に述べられている。

3.『天体運動論』におけるガウスの独創性

1809 年に刊行された『天体運動論』は直ちに各国で高い評価を受け、1810 年にはイギリスやフランスからメダルや褒賞が贈られた。同書は、天体の軌道決定に関する初めての本格的な理論書と言ってよく、その後の天文学者たちにも大きな影響を与えた。以下に示すように、同書にはガウスの独創的なアイデアが幾つも見られる。

(1) ガウス定数

ガウスは『天体運動論』の冒頭において、太陽を回る天体の運動を考察するために、

$$k = \frac{2\pi}{t\sqrt{1+\mu}}$$

という定数 k を導入した（第 1 節）。ここで、t は平均太陽日を単位とする 1 恒星年、μ は太陽の質量を 1 としたときの地球の質量である。 ガウスは、

$$t = 365.2563835 \qquad \mu = 0.0000028192$$

とおいて、

$$k = 0.01720209895$$

と計算した。この k は万有引力定数の平方根に相当するが、太陽系の天体の運動を精度よく記述するのに便利であり、「ガウス定数」（ガウス重力定数、ガウス引力定数などともいう）と呼ばれて、現在でも広く用いられている。

(2) 直接法と間接法

現在の軌道決定論においては、太陽の周りを回る天体の軌道決定の方法として、大別して直接法と間接法がある。直接法には、ピエール＝シモン・ラプラス(Pierre-Simon Laplace, 1749-1827)の創案にかかる「ラプラスの方法」とラグランジュに始まる「ラグランジュ=シャリエの方法」などがあり、運動方程式を積分せずに天体の速度成分を求めるのが特徴である。但し、ラグランジュやラプラスの研究は実用には余り役立たず、実用化されたのは 20 世紀になってからとされる。

間接法は、ガウスが『天体運動論』において示した方法であり、「ガウスの方法」とも呼ばれる。この方法は、ケプラーの法則などを用いて、天体の 2 つの位置と太陽を結ぶ扇形と 3 角形の面積比を利用する（第 95 節、第 128 節等）。この面積比に着目したところにガウスの独創性があったと言えよう。

(3) ガウスの方程式

『天体運動論』の第 141 節で、ガウスは、次のような等式を示している。

$$c\,Q\;\sin\omega\;\sin^4 z \;=\; \sin(z-\omega-\sigma)$$

ここで、$c,\ Q,\ \omega,\ \sigma$ は計算により求めることができる既知の補助量と考えてよいので、この式は z についての方程式となる。この方程式は、展開すると 8 次方程式になるが、展開しないで試算によって解くのが最も早いとガウスは述べている（第 142 節）。この方程式は、直接法においても間接法においても解かなければならない不可欠の式であり、「ガウスの方程式」と呼ばれている。

4. 最小二乗法について

(1) ルジャンドルの著作について

1806 年頃にツァッハは最小二乗法について述べたアドリアン＝マリ・ルジャンドル(Adrien-Marie Legendre, 1752-1833)の最新の著書 [115] のことを書簡でガウスに知らせた模様である。それに対し、ガウスは 1806 年 7 月 8 日の書簡において、自分は最小二乗法の原理を 12 年前から種々の計算で使用してきたこと

(dessen ich mich schon seit zwölf Jahren bei mancherlei Rechnungen bedient habe)、自分の仕事においても(今後)使用するであろうこと(und den ich auch in meinem Werke mit gebrauchen werde)、もっともその原理は本質的に「自分の方法」に属するものではないこと(ob er wol zu meiner Methode eben nicht wesentlich gehört)等を述べている[116)]。ここで"gebrauchen werde" (使用するであろう)と未来形になっている点が注目される。また、自分の軌道決定論において最小二乗法が本質的な役割を果たしているわけではない旨も明らかにされている。ガウスが 1801 年にケレスの軌道計算を行った際に最小二乗法を用いて精確な軌道を得たという趣旨の記述が一部の書物に見られるが[117)]、それが正しくないことはこの文章からもうかがえる。なお、1809 年刊行の『天体運動論』においてガウスが示した方法では、最初に 3 個の観測データから天体の楕円軌道を決定する段階では最小二乗法は登場しない(同書第 150 節～第 163 節の計算例参照)。最小二乗法が使用されるのはその後の軌道改良の段階である(同書第 174 節参照)。

(2) 『天体運動論』における最小二乗法の紹介

『天体運動論』はその第 2 部第 3 章（第 172 節～第 189 節)において、最小二乗法の紹介をしている。最小二乗法については、上記のようにルジャンドルが 1805 年の著書で公表していたが、ガウスが「我々の原理は 1795 年から既に使われていた」（第 186 節)と記したために、両者の間で最小二乗法の先取権をめぐって論争が生じたことはよく知られている。

『天体運動論』ではその第 2 部第 2 章までで数個の観測に基づく軌道決定の考察が終了するが、ここまでが 1802 年論稿でいう①の段階に相当する。そして第 2 部第 3 章と最後の第 4 章では、同論稿の②に当たる部分の議論が展開される。このような構成からしても、最初の軌道決定の段階では最小二乗法が登場しないことは十分納得がいく。

1802 年論稿の②に当たる議論は、『天体運動論』では第 2 部第 3 章の冒頭（第 172 節）で行われている。以下はその訳文である。

第 3 章　何個の観測であれそれらを最大限に近似する軌道の決定

§172

天文学上の諸観測及び軌道計算の基となるその他の諸数値が絶対的な精確さを有するならば、観測が 3 回であれ又は 4 回であれ、 得られる軌道要素もまた(運動が厳密にケプラーの諸法則に従って行われると仮定する限り)絶対的に十分精確であり、それ故、次々と他の観測を加えても、ただ軌道要素が確認されるのみで、修正されることはない。

しかしまた、確かに我々の計測及び観測はすべて真の値に対する近似に過ぎず、また、それらの数値に基づく計算もすべて同じように近似に過ぎないのであるから、具体的な自然現象に関して行われる計算の場合は、すべて、我々が可能な限り真実に近づくことをその最高の目標としなければならない。そして、これを実現するためには、未知の諸量の決定に必ず要

求される*よりも多数の*観測を適切に組み合わせるほかはない。この作業に着手することができるのは、軌道が既に近似的に知られてからであり、その後に、すべての観測を*可能な限り精確に*満たすよう、軌道の修正を行うことになる。この表現は何か曖昧なものを含むように見えるけれども、以下に述べる原理を用いれば、問題は、正当な根拠を有する一定の方法に従って解決されるのである。

　最高度の精確さを得る努力をなす価値がある時点は、軌道決定にいわば最後の手を入れる段階である。他方で、いずれ新規の観測があって新たに修正の機会が与えられる見込みがある場合、精確さと引き換えに作業量が顕著に減少するならば、事の推移に応じて，多かれ少なかれ極度の精確さを緩めるのが適当である。我々はどちらのケースにも対応できるように努めよう。

　このように、最初の計算で得られた（近似的な）軌道を他の観測データによって精密化する手法として最小二乗法が登場するのである [118)]。1801 年のケレスの軌道計算に際して最小二乗法による精密化の手法が用いられそれがケレスの再発見を可能にしたという見方が適切でないことは以上の記述からも明らかである。

第 7 章　ベッセルの軌道計算法

1. 1807 年の大彗星

1807 年秋、肉眼でよく見える明るい彗星（しばしば「大彗星」と呼ばれる）が北半球に現れた。この彗星（以下「1807 年彗星」という）を最初に発見したのはイタリアのシチリア島在住の修道士で [119)]、1807 年 9 月 9 日のこととされる。その後、この大彗星の発見の知らせが相次ぎ、3 か月以上にわたって各地で観測が行われた。多数の観測データがツァッハに寄せられ、それらは『月報』(16 巻)1807 年 11 月号以降に掲載された [120)]。

1807 年彗星については、ガウスを始め、多くの天文学者が軌道計算を試みた。それらはいずれも放物線軌道を前提としていたが、ベッセルは 1808 年に初めて楕円軌道を算定した [121)]。ベッセルはその後も検討を続けて、最終的に 1810 年の著書（以下「1810 年書」という）において周期 1713.5 年の楕円軌道との結論を示した [122)]。

1810 年書は、その前年に刊行されたガウスの『天体運動論』の記述をいち早く吸収して、最小二乗法による軌道改良を行う等、最新の軌道計算技術を駆使した注目すべき書であり、それ以降の天文学界に大きな影響を与えた。以下では、最小二乗法に関する 1810 年書の記述に注目しながら、ベッセルの軌道計算法の特徴を探ることにする。

2. 1810 年書の内容

ベッセルが 1807 年彗星について最終的な楕円軌道要素を算出した際の特徴としては、2 つのことが挙げられる。それは、①他の惑星の影響による摂動を計算しようとしたこと、および、②軌道の修正に最小二乗法を使用したこと、である。以下、この 2 点についての 1810 年書の記述を見てみよう。

(1) 摂動計算について

第 5 次の軌道要素（＝軌道要素Ⅴ）の算定においてかなり精確な楕円軌道を得たベッセルは、最後の課題に取り組んだ。すなわち、木星やその他の惑星が及ぼす引力によって 1807 年彗星の軌道がどの程度変化しただろうかという「摂動」の問題である。

ベッセルは、実際の彗星の軌道は、太陽以外の天体の影響を受けたり、あるいは種々の非重力的効果を受けたりして、必ずしも円錐曲線を描くとは限らないことを認識していた。そして、例えば、ハレー彗星の周期を 1 年変える力は、1000 年の周期を 75 年変えるし、2000 年の周期なら 238 年変えると述べている。そして、彗星の周期を不変の量と考えてはいけないこと、精確な軌道決定については摂動の問題を無視できないことなどを強調し、1810 年書の第 2 章第 2 節から摂動問題の考察を開始する。

第 2 章の第 2 節において種々の公式を含む一般論を展開した後、第 3 節では具体的な数値計算に入る。まず、彗星の位置をx，y，z 座標で表し、すべての惑星から受ける引力を総合して、x軸、y軸、z軸方向ごとの摂動力として数値で表す。その数値は 1807 年 9 月 22 日から 1808 年 3 月 20 日まで 30 日ごとに計 7 回計算される。そして、この摂動力を受けた結果、軌道要素がどのように変化する

かを調べ、7 回の基準日のそれぞれについて、経過時間、近日点引数、離心率、半パラメータ、軌道傾斜角、昇交点位置の 6 個の量の 1 日当たりの変化量を計算する。こうして摂動力に基づいて軌道要素の変化量が算定され、最小二乗法適用への準備が整う。

(2) 最小二乗法について

ここまでの考察により、近日点経過時刻、近日点引数、近日点距離、離心率、昇交点黄経、軌道傾斜角のそれぞれの修正量を未知数とする 12 本の方程式（条件方程式）が得られた。ここでベッセルは最新の知見である最小二乗法を適用するわけだが、それについて次のように述べている [123)]。

> 新たに軌道を決める際に、もしも多数の観測の間の平均となるような地点を個別に 3 個選んで――あるいは 3 個修正して―― 計算の基礎としたならば、それは無益で、微分式の展開に費やした労力の浪費であり、適切ではなかったであろう。それ故、私は、3 個の観測を完全に満足させるのではなく、観測全体をできるかぎり良く満足させる軌道を求めた。つまりいわゆる最小二乗法に従って軌道を決定したのであるが、この方法の発案者は、その不朽の著作(ガウス『天体運動論』第 2 部第 3 章§179)において、この方法によればそこに含まれる未知数よりも多い個数の条件方程式をできる限り精確に満たす解が与えられることを示した。

もっとも『天体運動論』は最小二乗法の理論について詳説しているが、天体の具体的な軌道計算の仕方を示しているわけではない。特に、6 個の軌道要素の修正量と経度又は緯度の修正量とを 1 次式で結び付ける条件方程式の導出は決して簡単ではない。それを直ちに独力でなし得たベッセルの実力は高く評価されてしかるべきであろう。

3. ベッセルの軌道計算法の評価

ベッセルが 1810 年書で示した軌道計算法については、次のような点を指摘することができよう。

第 1 に、彗星の軌道計算に当たって、木星その他の惑星が与えた摂動の効果を取り入れたことである。1807 年彗星は 6 か月以上にわたって観測されたため、その間に生じた摂動による軌道変化は観測データの中に含まれたと考えられる。ベッセルはこのような考えに立って、木星その他の惑星から受けた力の影響による各軌道要素の変化量を計算し、それを軌道要素Ⅴの理論値から差し引く。こうして得られた修正後の軌道要素Ⅴに基づく新たな理論値と実際の観測値との差の二乗和が最小となるような軌道要素の修正値の組み合わせを、ガウスの提示した最小二乗法によって求める。このように摂動分を考慮して軌道要素の理論値を修正するやり方はベッセル独自の方法と言ってよく、この点は次章で見るガウスの 1811 年論文と異なる。しかし、後にエンケが 1805 年第 1 彗星と 1818 年彗星の軌道の比較計算を行った際にはベッセルが行った摂動計算も参考にされている。その意味で、ベッセルの摂動計算の方法が持つ先駆的な意義は大きいと言わなけ

ればならない[124]。

第 2 は、1810 年書が天体の軌道計算について最小二乗法を明示的に使用した初めての例と考えられることである。最小二乗法の理論自体は、1805 年にフランスのルジャンドルによって初めて公に記述され、1809 年のガウスの『天体運動論』によってその理論面や実用性が明らかにされた。しかし、天体の軌道要素が一応得られた後にその修正すべき量を算定するために最小二乗法を実際に用いたのはベッセルの 1810 年書が最初と言ってよい。1810 年代にはガウスの弟子であるニコライやエンケらを中心に最小二乗法を用いて軌道計算を精確化することが一般化するが、その手本となったという意味でも 1810 年書の意義は大きい。

第 8 章　ガウスの 1811 年論文について

1.　ガウスによるパラスの軌道計算

既述のように、ブレーメン在住のオルバースは、1802 年 3 月 28 日に火星と木星の間を回る小惑星を発見し、パラスと名付けた(第 3 章 5 参照)。パラスは、1801 年に発見されたケレスに次ぐ 2 番目の小惑星であるが、ケレスよりもその離心率と軌道傾斜角が相当に大きく、木星などによる摂動の影響がより大きい。そのため、パラスの軌道を精確に計算することには、かなりの困難が伴った。

ガウスは、オルバースらの観測データに基づき、パラスの軌道の計算を行った。新たな観測が報告されるとそれに応じて軌道要素を改訂することがあるが、ガウスは、1802 年から 1810 年秋までに全部で 11 回の軌道要素計算を行っている。その一覧は次の通りである [125)]。

	計算年	発表刊行物	『全集』収録個所
第 1 次軌道要素	1802 年	『月報』5 巻(1802 年 6 月号)593 頁	6 巻 213 頁
第 2 次軌道要素	1802 年	『月報』5 巻(1802 年 6 月号)596 頁	6 巻 214 頁
第 3 次軌道要素	1802 年	『月報』6 巻(1802 年 7 月号) 83 頁	6 巻 218 頁
第 4 次軌道要素	1802 年	『年鑑』(1802 年刊行)　228 頁	6 巻 223 頁
第 5 次軌道要素	1802 年	『月報』6 巻(1802 年 12 月号)581 頁	6 巻 233 頁
第 6 次軌道要素	1803 年	『年鑑』(1803 年刊行)　180 頁	6 巻 235 頁
第 7 次軌道要素	1804 年	『月報』9 巻(1804 年 3 月号)250 頁	6 巻 246 頁
第 8 次軌道要素	1805 年	『月報』11 巻(1805 年 4 月号)377 頁	6 巻 263 頁
第 9 次軌道要素	1806 年	『月報』14 巻(1806 年 8 月号)188 頁	6 巻 277 頁
第 10 次軌道要素	1808 年	『年鑑』(1808 年刊行)　136 頁	6 巻 294 頁
第 11 次軌道要素	1810 年	『月報』22 巻(1810 年 10 月号)400 頁	6 巻 320 頁

2. 1811 年論文の概要

ガウスは 1810 年 11 月 25 日にゲッティンゲン大学でパラスの軌道要素に関する学術講演を行い、翌年、その内容を同大学の学術誌に論文として寄稿した(以下この論文を「1811 年論文」という)[126)]。1811 年論文は、パラスを例にとって、天体の軌道計算に関して最小二乗法をどのように使うかを比較的分かりやすく解説した論稿として注目される。その概要は以下の通りである。

パラスは約 4.6 年の周期で太陽の周りを地球と同じ方向に回っている。そのため、1 年数か月ごとに、パラスの黄道面への射影位置と地球と太陽とが一直線に並ぶ瞬間（衝）が訪れる。衝の瞬間においては、パラスの地心黄経と日心黄経が一致するので、その観測に基づいて軌道要素の計算を精確に行うことができる。このような観点から、ガウスはそれまでに観測できた、6 回（1803 年から 1809 年のうち 1806 年を除く毎年 1 回）の衝の観測データ [127)] をもとに、パラスの軌道要素の改良を以下のように行った。

●1803 年、1804 年、1805 年、1807 年の衝からパラスの軌道要素 I を計算する。その結果は次の通りである。

平均経度の元期(1803 年。ゲッティンゲン子午線)・・・・ 221° 39' 30".4

平均日々運動　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　770".2143
近日点経度（1803 年）・・・・・・・・・・・・・・・・　121° 03' 11".4
昇交点黄経（1803 年）・・・・・・・・・・・・・・・・　172° 28' 56".9
軌道傾斜角　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　34° 37' 41".0
離心率（= sin 14° 10' 58".81）・・・・・・・・・・・・・　0.2450198
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　0.4423149

●1804 年、1805 年、1807 年、1808 年の衝からパラスの軌道要素Ⅱを計算する。その結果は次の通りである。

平均経度の元期(1803 年)・・・・・・・・・・・・・・・・　221° 34' 56".7
平均日々運動　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　770".4467
近日点経度（1803 年）・・・・・・・・・・・・・・・・　121° 05' 22".1
昇交点黄経（1803 年）・・・・・・・・・・・・・・・・　172° 28' 46".8
軌道傾斜角　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　34° 37' 31".5
離心率（= sin 14° 10' 58".81）・・・・・・・・・・・・・　0.2447624
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　0.4422276

●1805 年、1807 年、1808 年、1809 年の衝からパラスの軌道要素Ⅲを計算する。その結果は次の通りである。

平均経度の元期(1803 年)・・・・・・・・・・・・・・・・　221° 23' 24".6
平均日々運動　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　770".9265
近日点経度（1803 年）・・・・・・・・・・・・・・・・　120° 58' 04".8
昇交点黄経（1803 年）・・・・・・・・・・・・・・・・　172° 27' 52".4
軌道傾斜角　・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　34° 36' 49".4
離心率（= sin 14° 10' 58".81）・・・・・・・・・・・・・　0.2446335
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・　0.4420473

以上のうち、ガウスは軌道要素Ⅱを基にして、最小二乗法を適用するのであるが、そのためには経度と緯度の微小な変化を 6 個の軌道要素の微小な変化で表す 1 次式が必要である。ガウスは、軌道要素の微小な変化を表す量（補正量）として次の 6 個を選んだ。

$\mathrm{d}L$・・・任意の元期に対する天体の平均経度の補正量
$\mathrm{d}\Gamma$・・・平均日々運動の補正量
$\mathrm{d}\Pi$・・・近日点経度の補正量
$\mathrm{d}\varphi$・・・その sin によって離心率を表す角度の補正量
$\mathrm{d}\Omega$・・・昇交点黄経の補正量
$\mathrm{d}i$ ・・・軌道傾斜角の補正量

ガウスは、『天体運動論』で述べた各種の公式等を駆使して、日心黄経（衝の場合、地心黄経に等しい）の補正量 $\mathrm{d}\lambda$ は上記の 6 個の補正量の 1 次式として次のように表せることを示した。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\lambda \ = \ & \frac{aa\cos\varphi\cos i}{rr\cos^2\gamma}\mathrm{d}L \\
& +\frac{taa\cos\varphi\cos}{rr\cos^2\gamma}\mathrm{d}\Gamma \\
& +\left(\frac{\cos i}{\cos^2\gamma}-\frac{aa\cos\varphi\cos i}{rr\cos^2\gamma}\right)\mathrm{d}\Pi \\
& +\frac{aa\cos i}{rr\cos^2\gamma}(2-e\cos E-ee)\sin E\,\mathrm{d}\varphi \\
& +\left(1-\frac{\cos i}{\cos^2\gamma}\right)\mathrm{d}\Omega \\
& -\tan\gamma\cos(\lambda-\Omega)\,\mathrm{d}i
\end{aligned}
$$

ここで、aは長半径、rは動径(=太陽から天体までの距離)、γは日心黄緯、tは元期から観測時までの日数、$e(=\sin\varphi)$は離心率、Eは離心近点角、λは日心黄経(=地心黄経)、Ωは昇交点黄経を表し、いずれも既に得た軌道要素から算出できる既知量である。

また、地心黄緯の補正量 $\mathrm{d}\beta$ については、次のような 6 個の補正量の 1 次式で表せることを示した。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\beta = & -\frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\tan\varphi\sin v}{r\sin\gamma}\mathrm{d}L \\
& +\left\{\frac{2\sin\beta\sin(\beta-\gamma)}{3\Gamma\sin\gamma}-\frac{at\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\tan\varphi\sin v}{\mathrm{r}\sin\gamma}\right\}\mathrm{d}\Gamma \\
& +\frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\tan\varphi\sin v}{\mathrm{r}\sin\gamma}\mathrm{d}\Pi \\
& +\frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\cos\varphi\cos v}{\mathrm{r}\sin\gamma}\mathrm{d}\varphi \\
& +\frac{2\sin\beta\cos(\beta-\gamma)\cos}{\sin}\mathrm{d}i \\
& -\sin\beta\cos(\beta-\gamma)\cos\gamma\cot(\alpha-\Omega)\,\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

ここでβは地心黄緯、vは真近点角、Γは平均日々運動、i は軌道傾斜角、α は補正後の日心黄経$(=\lambda+d\lambda)$であり、いずれも既知量である [128)]。

さて、その計算式によって得られた日心黄経及び地心黄緯の計算値を観測で得られた日心黄経及び地心黄緯の値と比較すると、6 個の補正量（＝未知数）の間で成り立つべき 1 次式（＝方程式）が 11 個得られる [129)]。未知数より方程式の方が多いので、当然、これらの式をすべて厳密に満たす解は存在しない。そこで、最も確からしい解を得るために最小二乗法を適用して、6 個の未知数を含む 6 個の 1 次方程式を導く。そしてこれを解けば、求める 6 個の補正量が得られ、改良された軌道要素が得られる。

3. 1811 年論文の評価

1811 年論文については、次のような点を指摘することができる。

①通常の観測ではなく、衝の観測のデータのみを使用している。そのため、観測

期間は 1803 年 6 月から 1809 年 9 月までの約 6 年 3 か月に及んでいる。これは通常の彗星の観測期間がせいぜい数か月程度であるのと比べると格段に長い。
②衝という特殊な状態下の観測のため、日心黄経と地心黄経が一致する。そのため、通常であれば取得できない「日心黄経の観測データ」を用いて考察をすることができた。
③この論文で、ガウスは初めて天体の軌道計算に最小二乗法を適用する方法を具体的に示した。この論文の少し前にベッセルが 1810 年書で長周期彗星の軌道計算に際して最小二乗法を用いているが、その説明はやや簡略な印象を受ける。それに比べると、1811 年論文は関係の補助公式等を丁寧に示し、また、連立方程式から未知数を消去する簡便な計算法を示すなど、読者に分かりやすい構成となっている。
④1811 年論文の問題点としては、パラスの摂動の問題を考慮していないことが挙げられる。ガウスは 1810 年代を通じてパラスの摂動の計算に苦労しつつ取り組むのであるが [130)]、上記のように 1803 年から 1809 年までの観測に基づいてパラスの軌道要素を計算するのであれば、その間の摂動による変化を考慮しないと、計算の精度の意味が薄れるであろう。この点をガウスはもちろん理解しており、摂動の検討は別の機会に譲ってここでは「修正量の確定」が中心的な話題であると断っている [131)]。つまり、最小二乗法を使って細かな修正量を算定しても、もっと大きな変動が摂動によって生じている可能性は否定していないわけである。その意味で、1811 年論文はその執筆時点におけるパラスの精確な軌道要素を突き止めようとしたものではなく、むしろ摂動は無視して軌道要素の不変を前提とした上で、6 回の衝の観測から 1 つの最も確からしい軌道要素を算定する方法を述べた論稿であると言うべきであろう [132)]。このように摂動を考慮しないで軌道計算を行っている点で既述のベッセルの 1810 年書とは大きく異なることに注意すべきである。

第 9 章　ニコライの 1813 年論文について

1．ニコライの経歴

フリードリッヒ・ニコライ(Friedrich Bernhard Gottfried Nicolai, 1793-1846)は 1793 年にブラウンシュヴァイクに生まれ、1811 年にゲッティンゲン大学の学生になった。最初は神学を学んだが、すぐにエンケと共にガウスの指導下で数学を学ぶようになった。1813 年にはゴータ近辺のゼーベルク天文台に就職して、天文学者としての活動を始めた。ニコライは計算に優れた能力を発揮し、その計算力はガウスからも高く評価された[133)]。1816 年にマンハイムの天文台に移り、1846 年に死去するまでマンハイムに在住した。

2．1813 年論文の概要

1811 年 11 月 16 日にポンは彗星を発見した(1811 年第 2 彗星)[134)]。数名の天文学者がこの彗星の軌道を計算したが、それらはいずれも放物線軌道を前提としていた。ガウスもこの彗星を観測し、軌道計算をしたが、当時まだ学生だったニコライの計算結果の方が適当だとして、1812 年 5 月に彼の計算結果を報告している[135)]。そのときは放物線軌道であったが、ニコライは 1813 年の論文[136)]（以下「1813 年論文」という）で、この彗星が楕円軌道を描いていることを初めて示した。この論文の概要は次の通りである。

まず、精度の高いと思われる観測を 5 個選び、それを軌道決定の基本点とした。その観測は次の通りである。

ゲッティンゲン平均時	(見かけの)赤経	(見かけの)赤緯
1811 年 11 月 20.43106 日	66° 56′ 00″.0	− 24° 18′ 10″.9
12 月 11.43612 日	63° 33′ 07″.2	− 8° 39′ 41″.0
12 月 29.42078 日	62° 26′ 31″.2	+ 6° 11′ 19″.8
1812 年 1 月 14.36851 日	63° 48′ 02″.3	+ 16° 57′ 52″.3
2 月 6.32323 日	69° 20′ 00″.3	+ 27° 22′ 43″.6

そして、光行差を補正し、黄経の基準時を 1812 年 1 月 1 日現在に定める等の整理を行ってから、軌道要素を検討した。放物線軌道を仮定すると、5 個の基準の黄経・黄緯という 10 個の数値をすべて満足させるのは不可能であることが判明した。こうして、次に、楕円軌道の探索が行われる。放物線軌道の計算結果から、彗星と地球のおおよその距離は分かっているので、それを暫定的に使用し、またガウスの『天体運動論』の議論に沿って、円錐曲線を求める計算を行う。こうして、次の楕円軌道が得られた[137)]。

近日点通過時刻(T)　　1811 年 11 月 10.99807 日　(ゲッティンゲン平均時)
近日点距離の対数($\lg q$)　　0.1991050 (= 1.5816304 AU)

離心率(e)	0.98120545
近日点経度(Π)	47° 26′ 59″.2
昇交点黄経(Ω)	93° 02′ 37″.2
軌道傾斜角(i)	31° 15′ 47″.2

なお、この場合の彗星の周期は約 773 年になる。この楕円の軌道要素で計算すると、5 個の基準点における観測値との誤差は次のようになり、かなり小さい。

	黄経の誤差	黄緯の誤差
1811 年 11 月 20 日	+ 18″.4	+ 13″.0
12 月 11 日	− 10″.6	+ 9″.9
12 月 29 日	0″.0	0″.0
1812 年 1 月 14 日	+ 2″.9	− 16″.5
2 月 6 日	0″.0	0″.0

さて、次に、この楕円軌道要素を基に、最小二乗法を使ってさらに精確な値を求めることを考える。その際の公式は概ねガウスの『天体運動論』から採られているが、ニコライは、従来利用されていなかった公式も自分の工夫に基づいて使用した旨を明らかにしている[138]。

ニコライは、黄経及び黄緯の誤差を $\mathrm{d}T, \mathrm{d}q, \mathrm{d}e, \mathrm{d}\Pi, \mathrm{d}\Omega, \mathrm{d}i$ の 1 次式で表す式[139]を計 10 個作り、最小二乗法を適用して、誤差の二乗和を最小とする $\mathrm{d}T, \mathrm{d}q, \mathrm{d}e, \mathrm{d}\Pi, \mathrm{d}\Omega, \mathrm{d}i$ を求めた。その結果、次の補正量が得られた。

$$\mathrm{d}i = +83''.86$$
$$\mathrm{d}\Omega = -45''.11$$
$$\mathrm{d}\Pi = +27''.96$$
$$\mathrm{d}e = +0.00150543$$
$$\mathrm{d}q = +0.0004770$$
$$\mathrm{d}T = +0.020030$$

この補正量を第 1 次楕円軌道要素に加えて、次の最終楕円軌道要素が得られた。

近日点通過時刻(T)	1811 年 11 月 11.018105 日(ゲッティンゲン平均時)
近日点距離の対数(lg q)	0.1992359 (= 1.5821072 AU)
離心率(e)	sin 79°19′49″.1 = 0.98271088
近日点経度(Π)	47° 27′ 27″.1 (1812 年 1 月 1 日分点)
昇交点黄経(Ω)	93° 01′ 52″.1 (1812 年 1 月 1 日分点)
軌道傾斜角(i)	31° 17′ 11″.0
長半径	91.509 AU

周期　　　　　　　　　　875.4 年

これを観測データと比較すると、誤差は次のように極めて小さくなった。

	黄経の誤差	黄緯の誤差
1811 年 11 月 20 日	＋ 6″.6	－ 2″.4
12 月 11 日	－ 8″.3	＋ 2″.4
12 月 29 日	＋ 3″.4	＋ 2″.0
1812 年 1 月 14 日	＋ 3″.8	－ 7″.1
2 月 6 日	－ 3″.1	＋ 8″.3

こうして、この彗星に関するニコライの楕円軌道計算は成功裏に終了した [140)]。

3. 1813 年論文の評価

このニコライの 1813 年論文については、次のような特徴を指摘できよう。

①この論文は、天体の軌道計算に最小二乗法を適用しているが、これは、ベッセルの 1810 年書、ガウスの 1811 年論文に次いで 3 番目の例である。それまでの 2 つの前例と比較して、計算の過程が分かりやすく書かれている。

②最小二乗法を適用した結果、少なくとも基準点の 5 個所については、観測と計算の一致度が顕著に向上している。これはまさに最小二乗法の威力を十二分に示していると言えよう。

③この論文執筆の当時、ニコライはやっと 20 歳になろうとする無名の学生だった。ガウスの指導を受けていたとは言え、このような経験の浅い学生が最新の計算技法を駆使して精確な軌道計算を行ったということは、それだけ当時のドイツ天文学界における軌道計算のレベルが進歩したことを示している。このような優秀な軌道計算の担い手を得たガウスは、その後、細かい軌道計算はなるべくニコライその他の有能な若手に任せるようになっていく。

④この論文は木星その他の惑星による摂動の影響は考慮していない。このような摂動を考慮すると、周期はもう 120 年程度短くなると試算されている [141)]。

第 10 章　1812 年以降の周期彗星の発見について

前章で見たように、1811 年には 2 個の長周期彗星が現われたが、1812 年以降も幾つかの周期彗星が出現した。1812 年のポンス・ブルックス彗星、1815 年のオルバース彗星、1818 年のクロンメリン彗星などがそれである。これらはいずれも周期が数十年程度の彗星であるが、1810 年以前にはこのような彗星の周期を精確に計算することは難しかった。しかし、前章までに見たように、ベッセル、ガウス、ニコライらは最新の計算方法である最小二乗法を武器に楕円軌道を精確に計算する能力をこの頃までに備えていた。彼らは 1812 年以降に現れた周期彗星の周期をいかに精確に計算できたであろうか。それを以下に検証しよう。

1. ポンス・ブルックス彗星（1812 年）について

1812 年 7 月 12 日にポンは或る彗星を発見した。この彗星は同年 9 月 28 日まで観測された。当初は何人かの天文学者によって放物線軌道として軌道要素が計算されたが、1816 年にエンケ [142] が初めて楕円軌道を算定し、その周期を 70.69 年とした [143]。この計算によれば、次は 1883 年頃に観測できることになる。その探索は難航したが、1883 年にブルックスによって偶然この彗星が再発見され、ポンス・ブルックス彗星と呼ばれるようになった。

エンケはこの彗星の軌道計算に当たって、ベッセルやニコライの方法に従い、最小二乗法による修正も行っている。彼の計算によれば、最小二乗法による修正後の誤差は、5 個の基準点において、赤経・赤緯とも数秒から 30 秒程度に収まっている [144], [145]。

2. オルバース彗星（1815 年）について

オルバースは 1815 年 3 月 6 日に彗星を発見した。この彗星は、1815 年 8 月末頃まで観測された。この彗星については、ガウス、ベッセル、ニコライらが軌道計算を行った。ベッセルは最初に楕円軌道の軌道要素を発表し、周期は 73 年から 74 年程度とした [146]。ガウス [147]、ニコライ [148] らの計算した楕円軌道も周期は 72 年～77 年程度で、それほどの相違はなかった。この彗星はオルバース彗星と呼ばれるようになった [149]。

3. クロンメリン彗星（1818 年）について

数多くの彗星を発見しているポンは、1818 年 2 月 23 日にも新たな彗星を見つけた。この彗星は 2 月 27 日を最後に見えなくなり、観測できたのは 4 回のみであった。エンケは 1818 年にこの 4 回の観測から放物線軌道を計算しようと試みたが、成功しなかった [150]。その後、1873 年に発見された彗星がこの彗星と同一であるとの主張がなされた。クロメリンは、この 2 つの彗星と 1928 年に観測された彗星がすべて同一であり、その周期は約 27.7 年であることを 1932 年に示した [151]。こうして、この彗星はクロンメリン彗星と呼ばれるようになった。

第 11 章　1810 年代における軌道計算の水準について

　ここまでの考察を通じて、1810 年代における軌道計算の水準に関して、次のようにまとめることができよう。

①1810 年代には軌道計算の精度が格段に向上した。その大きな原因は、ガウスの『天体運動論』以降、最小二乗法が軌道計算に適用されるようになったことである [152)]。
②各地に設備の整った天文台が次々と建設され、望遠鏡の性能の進歩とあいまって、彗星その他の天体の観測の精度が向上した [153)]。このことが軌道計算の水準向上にも貢献したと考えられる。
③1812 年頃までは、精確な軌道計算を行う能力のある者は、実際上、ほとんどガウスとベッセルに限られていた。しかし、それ以降、ニコライやエンケが登場し、これら若手の天文学者による精力的な軌道計算に貢献するようになる。1819 年のエンケによるエンケ彗星の発見はその延長上にある [154)]。
④それまでハレー彗星とレクセル彗星を除いて余り登場しなかった短周期彗星が 1810 年代に続々と発見され、その周期が概ね正しく計算されるようになる。これは、楕円軌道の計算技術が向上したことと密接な関係がある [155)]。もっとも、再度の回帰が確認されるのは、何十年も先のことになるので、ハレー彗星に次ぐ第 2 の周期彗星の存在は 1819 年のエンケ彗星発見まで公認されなかった。

第 3 部　エンケ彗星発見の過程の考察 ―― 1819 年を中心に

第 1 章　概説

1. エンケの生涯

ヨハン・フランツ・エンケ(Johann Franz Encke, 1791-1865) [156]は、1791 年にハンブルクで生まれ、1811 年からゲッティンゲン大学でガウスの下で数学と天文学を学んだ。1813 年から 1815 年まで軍役に服したが 1816 年にはゲッティンゲンに戻り、すぐにゼーベルク天文台でリンデナウの助手に採用されて天文学の研究に従事した。1822 年にゼーベルク天文台長となった後、1825 年にベルリン天文台長に就任し、1844 年にベルリン大学の天文学教授となった。『ベルリン天文年鑑』(*BAJ*)や『天体観測』(*Astronomische Beobachtungen*)の編集に携わり、また晩年には今日でも特別摂動の計算に用いられる「エンケの方法」[156]を発表する等、天文学の分野で大きな貢献を行った。

2. エンケによる初の超短周期彗星の発見

エンケは、1819 年 1 月から 5 月にかけて、前年 11 月に南フランスで発見された彗星(以下この彗星を「1818 年彗星」と呼ぶ）の軌道計算を行い、これが周期 3 年余の超短周期彗星であること及びこの彗星は 1805 年に観測された彗星（以下この彗星を「1805 年彗星」と呼ぶ）と同一である旨を主張した。エンケの師であるガウスはこの主張が正しいことを認め、エンケが史上初めて周期数年程度の短周期彗星を発見したこと [157]およびその天文学上の意義は極めて大きいことを雑誌 *GGA*(ゲッティンゲン学術公報)上で宣言した。こうしてエンケは史上初の超短周期彗星の発見者としての栄誉を担うことになり、やがてこの彗星は「エンケ彗星」と呼ばれるようになった。

しかし、この超短周囲彗星の発見はエンケが全くの独力で成し遂げたわけではない。特に、ガウスは単にエンケの主張を正しいと認めて世に紹介しただけでなく、当初から 1805 年彗星と 1818 年彗星の軌道の比較計算が価値あることを認め、また木星の影響を考慮するよう指示するなど、エンケの計算作業に積極的にかかわった。つまり、エンケによる超短周期彗星の発見という歴史的な出来事の背後には、演出家とも言うべきガウスの重要な存在があった。以下、第 3 部ではこのことを具体的な資料に基づいて論証し、超短周期彗星の発見に関してガウスがどのような役割を果たしたのかを明らかにしたい [158]。

第 2 章　超短周期彗星の発見に至る経過

1818 年 11 月 27 日未明にマルセイユ天文台のポンが彗星を発見し、若干の観測データを得た。また、ドイツではマンハイムのニコライ、ゲッティンゲンのカール・ルートヴィヒ・ハーディング(Karl Ludwig Harding, 1765-1834)、ゼーベルクのエンケの 3 名がこの彗星の観測に成功した。

ニコライは、1818 年 12 月 22 日から 29 日までの間に 6 回観測し、その観測データ及び自分の計算した暫定的な放物線軌道要素を 1819 年 1 月 8 日付の書簡でガウスに送った。ニコライは、暫定的に、近日点通過時刻=1819 年 1 月 25.0 日[159]、近日点距離の対数= 9.52933[160]、近日点経度=145°49'10"、昇交点黄経=330°14'17"、 軌道傾斜角=14°59'6"、順行、と算定した[161]。

エンケは、1819 年 1 月にニコライと自分の観測データに基づいて 1818 年彗星の軌道計算を開始した[162]。そして、この彗星の軌道が 1805 年に現れた彗星と似ていることに気が付き、両者の彗星が同一であることの立証にとりかかった。彼は 1819 年 5 月までかかってその立証に成功した。その間の事情はエンケとガウスの間で交わされた計 4 通の書簡からうかがうことができる。これらの書簡は未刊行であるが[163]、自筆の書簡の写真が公表されているので、それを判読することにより、内容を知ることができる。以下では、これらの書簡の検討を通じて、エンケとガウスの間でどのようなやり取りがあったかを明らかにしよう。

1. エンケの 1819 年 2 月 5 日付のガウス宛書簡 —— 超短周期彗星の発見か

1819 年 1 月の後半、エンケは、それまでに入手した 1818 年彗星の観測データに基づいて同彗星の軌道を計算する作業に没頭した。そして、得られた成果の概要を 1819 年 2 月 5 日付の書簡（以下「2 月 5 日書簡」と呼ぶ）でガウスに報告した。その骨子は、

① 放物線軌道では誤差が大きくて観測データをうまく説明できない
② 周期 3.6 年の楕円軌道なら観測データをかなりうまく説明できる
③ 1805 年の彗星の軌道がこの彗星と似ているので両者は同一かもしれない

等である。以下、この 3 点に関する 2 月 5 日書簡の内容を紹介しよう。

(1) 放物線軌道を仮定した場合の誤差について

まず、1818 年彗星についてエンケ自身が観測した、1819 年 1 月 1 日、1 月 4 日、1 月 5 日、1 月 6 日、1 月 12 日の 5 個の観測データが報告されている[164]。このデータ及びマンハイムにおけるニコライの観測データについて、エンケは次のように述べている[165), 166]。

> 軌道計算をしたところ、直ちに注目すべき結果が示されました。12 月 22 日から 1 月 12 日までの小さい弧について、誤差を修正できそうな放物線軌道を見つけることはできませんでした。一部の観測については 3 分の誤差を避けることができず、また、マンハイムの観測も当地[ゼーベルク]の観測も誤差を[すべて]1 分以内に収めることはできませんでした。

一般に、軌道の計算値と観測値のずれがどの程度であれば許容範囲内かは一概

に言えないが、良好な計算値であればその多くは 30 秒以内に収まると考えてよい。2 分や 3 分以上のずれが続出するようではその軌道は正しくないと判断するのが普通である。エンケはこの書簡で放物線軌道として計算した場合と観測とのずれをすべて記しているわけではないが、最大で 3 分の誤差があり 1 分を超える誤差も複数あった模様なので、放物線軌道を否定するにはそれで十分だったと考えられる。

(2) 楕円軌道について

次に、エンケは楕円軌道を計算した場合の軌道要素や観測データとの誤差等について以下のように報告した[167]。

> いろいろ試みた後に、ポンのいささか粗い報告(etwas rohe Angaben)の助け[168]も借りて、或る楕円を見出しました。その周期はわずか 3.6 年ですが、すべてがまさしく満足できるレベルで一致しました。その軌道要素は以下の通りです。

近日点通過時刻	1819 年 1 月 27.13417 日
近日点経度（ω）	156° 14′ 08″
昇交点黄経（Ω）	334° 18′ 08″
軌道傾斜角（i）	13° 42′ 30″
長半径の対数（$\log a$）	0.3697758
離心率の sin 表示(φ)	58° 57′ 24″

> マンハイム及び当地の観測との比較を厳密に行ったところ、誤差は以下のようになりました。

	赤経	赤緯	観測地
1818 年 12 月 22 日	＋ 7″.6	－ 4″.7	マンハイム.
23 日	＋ 0″.3	－ 17″.3	〃
24 日	－ 1″.0	＋ 11″.7	〃
25 日	＋ 11″.2	－ 5″.5	〃
29 日	＋ 14″.6	－ 1″.8	〃
1819 年 1 月 1 日	＋ 15″.6	＋ 14″.8	ゼーベルク
4 日	＋ 26″.5	＋ 27″.2	〃
5 日	＋ 30″.6	＋ 12″.9	〃
6 日	＋ 36″.1	＋ 23″.8	〃
12 日	＋ 7″.1	＋ 3″.0	〃

> ポンの観測データとの差は取りません。これらの正負の符号がかなり規則的なことから、誤差をもっと減少させることは十分可能と思います。

上記の結果を見ると、1 月 5 日と 6 日の赤経以外の誤差はすべて 30 秒以内に収まっており、この楕円軌道は前述の放物線軌道よりも格段に精度が良いことが分かる。ただ、全体的に後の方ほど誤差が増大する傾向にあるので、軌道の改良によりもっと誤差を減らせることができるだろうというのがエンケの見立てである。ここまでの計算結果で、周期 3 年余の楕円軌道は極めて有力になったと言える。

しかし、それ以上に大きな問題が登場した。それは、次に見る1805年彗星との同一性の問題である。

(3) 1805年彗星との同一性について

エンケは、1818 年彗星の軌道を計算する過程で、その昇交点黄経・近日点経度・軌道傾斜角・近日点距離が1805年彗星と類似していることに気が付いた模様である [169]。この問題について、エンケは 2 月 5 日書簡で次のように述べている [170]。

> ここで注目されるのは、この彗星が1805年の第1彗星と、もちろん多少違うとはいえ、似ているということです。
>
> | | 1805年彗星 [171] | 1818年彗星 |
> |---|---|---|
> | 近日点通過時刻 | 1805年11月18.138日 | 1819年1月27.134日 |
> | 昇交点黄経（Ω） | 344° 37′ 19″ | 334° 18′ 08″ |
> | 軌道傾斜角（i） | 15° 36′ 36″ | 13° 42′ 30″ |
> | 近日点経度（ω） | 147° 51′ 28″ | 156° 14′ 08″ |
> | 近日点距離の対数（$\lg q$） | 9.57820 | 9.52579 |
>
> 1805 年彗星の軌道要素を修正することは容易ではないものの可能であり、そうすれば1818年彗星の軌道にもっと近づくことでしょう。ベッセル自身も1805年彗星について計算した軌道要素と観測との差の進み具合が規則的だったことから、なおより精確な軌道を求め得るに相違ないと結論しています。彼は、1806年7月現在で、放物線軌道では観測データを十分満足させることができないことを見出していました。私は、それ以降に彼がより精密な計算を行ったという話を見つけることはできませんでした。
>
> この2組の軌道要素を同一の長軸によってうまく表せるかどうかを調べること、そして摂動の影響を見積もって2つの彗星が同一か別物かを明確に決定できるようにすることには、労力を費やす価値があるでしょうか？それがいかに興味ある仕事だとしても、この大胆な推測という以上の確かな拠り所もなしにこの作業に着手することにはいささか躊躇します。

エンケはこのように述べて、1805 年彗星と 1818 年彗星の同一性の立証に取り組む価値があるかどうかの判断を師であるガウスに仰いだ。超短周期彗星の発見が当時の天文学に与える学問的意義を十分に理解していたガウスは、このエンケの問いに対し、直ちに肯定的な反応を示した。それを次に見よう。

2. ガウスの1819年2月25日付のエンケ宛書簡と *GGA* への寄稿

エンケから 2 月 5 日書簡を受け取ったガウスの反応は素早かった。この書簡に対してガウスがエンケに返事を出したのは 1819 年 2 月 25 日である。しかし、その前に、ガウスは *GGA* に寄稿して、ニコライの算出した放物線軌道要素とエンケの算出した楕円軌道要素を公表し、さらに1805年彗星との類似性についても言及した。その内容は以下の通りである。

(1) ガウスによる *GGA* への寄稿

ガウスはニコライ、ハーディング、エンケの3名から1818年彗星について報告を受けていたので、それらの情報を1819年2月18日付の *GGA* 28号に寄稿して公表した。その内容の概要は、次の通りである[172)]。

《 1818年11月にマルセイユのポンが発見した2つの彗星のうちの1つにつき、マンハイムのニコライは12月22日から29日までの間に6回観測し、その観測データ及び自分の計算した暫定的な放物線軌道要素を1819年1月8日付の書簡でガウスに送った。その他、ハーディングやエンケも観測を行った[173)]。エンケのガウス宛1819年2月5日付書簡によれば、エンケは、種々の試算の結果、公転周期3年7月の楕円軌道を算出することができた。この楕円軌道と観測値とのずれは概ね30"以内であり、近日点通過時刻=1819年1月27.13417日(ゼーベルク時間)、近日点経度=156°14'8"、昇交点黄経=334°18'8"、 軌道傾斜角=13°42'30"、軌道長半径の対数=0.3697758、離心率の sin 表示=58°57'24" である。この軌道は1805年の第 1 彗星の軌道と似ている。その時の彗星の観測結果は放物線軌道からの明らかなずれを示していたにもかかわらず、当時それ以上追求した天文学者はいなかった模様である。この2つの彗星が同一かについては注意深く調べる価値がある。 》

(2) ガウスからエンケへの1819年2月25日付の書簡

上記のように、ガウスは1819年2月18日付刊行の *GGA* に寄稿してエンケの算出した楕円軌道要素等を紹介したのであるが、ガウスは同誌の冊子を同封して、1819年2月25日付の書簡をエンケに送った。その書簡の中で、ガウスは1805年彗星の軌道の究明を勧めて、次のように述べている[174)]。

　ポンの第 1 彗星についての貴重なお知らせを本当にありがとう。この知らせは我が学術公報を通じて公表すべきだと考えました。その印刷したものをここに一冊同封します。木星は1808年の初めにこの彗星に相当の摂動を与えた可能性があるので、その時期に木星に接近したかもしれないこの彗星の軌道を計算することは十分労力を費やす価値があるでしょう。常に3～4年ごとに訪ねて来る彗星を我々がついに発見したとしたら、どんなにか素晴らしいことでしょう！ それがいずれ証明されるとすれば、あなたのおかげでこの事実を初めて知るのですから、前もってそのお祝いを申し上げておきます。

このようにガウスがエンケの計算結果を直ちに *GGA* に寄稿した背景には、それによってこの問題に関するエンケの「優先権」を確保するとともに、1805年彗星との同一性の立証によって、自己の愛弟子であるエンケに天文学者としての顕著な業績を挙げさせようとの配慮があったことは想像に難くない。

こうして、弱冠27歳のエンケは、師であるガウスの後押しを受けて、1805年

彗星の軌道要素の再検討と木星による摂動の影響の計算に取り組むことになった。それはエンケの予期した通り決して容易な仕事ではなかったが、以下に見るように、彼は数か月をかけてこの困難な作業を完成させることになる。

3. エンケの 1819 年 3 月 15 日付のガウス宛書簡 ―― 1805 年彗星の楕円軌道算出及び 1818 年彗星との比較

(1) ベッセルが計算した 1805 年彗星の軌道の修正

1805 年彗星については、ベッセルが放物線を仮定した場合の軌道計算を行い、1806 年にその結果を発表していた [175)]。しかし、その放物線軌道は観測との一致度が悪く、ベッセル自身が改良の必要性を認めていたものの、その後、彼を含めて誰も 1805 年彗星の軌道の改良を試みなかったようである。もちろん、1805 年彗星が放物線軌道を有するなら、もはや回帰しないのであるから 1818 年彗星と同一のはずはない。それ故、エンケとしては、まず 1805 年彗星の軌道を入念に再検討し、その軌道が実際は楕円軌道であったことを立証する必要があった。この点についてエンケがガウスに宛てた 3 月 15 日付の書簡(以下「3 月 15 日書簡」と呼ぶ)は次のように述べている [176)]。

> 暫定的な報告ですが、まだ決定的ではないものの、2 つの彗星が同一である可能性は非常に高まったと思われます。
>
> 1818 年彗星については新規の観測がなく、その軌道要素は重要性が極めて少ない微調整を施し得るだけなので、1805 年彗星を取り上げ、ブヴァール、ボーデとオルバースによる比較的良好な観測に基づいて軌道のより詳細な決定を試みました。まず、不運な観測選択のおかげで双曲線にたどりつきましたが、それは、e＝1.0 から e＝1.1 まで仮定すると、誤差がどんどん大きくなりました。また、5 個所を選定して最小二乗法を適用し、最も良く適合する放物線軌道として、
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | 近日点通過時刻 | 1805 年 11 月 18.10895 日 | (パリ平均時) |
> | 近日点経度 (ω) | 147° 56′ 50″ | |
> | 昇交点黄経 (Ω) | 345° 03′ 37″ | |
> | 軌道傾斜角 (i) | 15° 40′ 12″ | |
> | 近日点距離の対数 (lg q) | 9.5782558 | |
>
> を得ましたが、各観測に当てはめると 3 分から 4 分の誤差が常に生じました。

ここまではいわば失敗談だが、引き続いてエンケは楕円軌道の算定について以下の重要な報告をした。

(2) 楕円軌道の算定

1805 年彗星の軌道を楕円とした場合の計算について、エンケはこの 3 月 15 日書簡の中で次のように述べた [177)]。

全体を視野に入れた計算をしたところ、条件方程式がついに楕円に到達しました。そして、軌道要素の修正が余りに大きくまた条件方程式の係数がおそろしくずれるので、何回か反復を繰り返した後に、次の結果を得ました。

近日点通過時刻	1805 年 11 月 21.12778 日	(パリ平均時)
近日点経度（ω）	155° 42′ 58″	(1805 年 11 月 21 日現在の平均分点)
昇交点黄経（Ω）	335° 42′ 49″	(1805 年 11 月 21 日現在の平均分点)
軌道傾斜角（i）	13° 46′ 34″	
近日点距離の対数（lg q）	9.5376506	
離心率（e）	0.86044746	
長半径の対数（lg a）	0.3928129	

比較に際しては、小数点以下はもちろん 5 桁のみとし、また視差(Parallaxe)は、決して無視できないものなので、すべての微小な修正に際して考慮に入れました。そして次のような誤差を得ました。

	赤経	赤緯.	観測者
1805 年 10 月 20 日	＋ 2' 52"	－ 2' 56"	ブヴァール
21 日	－ 13"	＋ 55"	〃
22 日	－ 2' 16"	＋ 2' 10"	〃
27 日	－ 43"	＋ 35"	ボーデ
29 日	0"	＋ 28"	オルバース
30 日	－ 23"	＋ 10"	ブヴァール
31 日	－ 31"	＋ 23"	オルバース
11 月 3 日	－ 38"	＋ 3"	ブヴァール
12 日	＋ 2' 48"	＋ 41"	オルバース
13 日	－ 23"	＋ 44"	〃

最初の 3 個のブヴァールの観測は離心率 1.08 の双曲線なら合致しますが、それでは他のすべての観測と矛盾します。この 3 個を除外し、また、オルバースの 11 月 12 日の赤経は 13 日の赤経と両立しないのでこれも除くと、誤差は非常に小さくなり、この軌道が真の軌道に近い可能性が極めて高くなります。

注目されるのは、今や軌道要素のすべてが 1818 年彗星に非常に接近したことです。

	1805 年彗星	1818 年彗星
近日点経度（ω）	155° 42′ 58″	156° 14′ 08″
昇交点黄経（Ω）	335° 42′ 49″	334° 18′ 08″

軌道傾斜角（i）	13° 46′ 34″	13° 42′ 30″
離心率（e）	0.86044746	0.8567776
近日点距離の対数（lg q）	9.5376506	9.5257869
長半径の対数（lg a）	0.39281	0.36977

なお、この新しい軌道はまだ最小二乗法による決定を経ていないので、場合によっては長半径がさらに接近するかも知れません。少なくとも、私は、観測結果に大きな強制力を作用させなくても両者の軌道を一つの長軸で表せるという主張が可能だと信じています。

既に1805年とその翌年にこの彗星は木星に接近しています。そして、もし1808年8月にも強力な影響を受ける可能性があったのならば、まだ残っている軌道要素の差異をそれによって説明することは難しくないでしょう。昇交点の差異が最も大きいですが、これは傾斜角が小さいためであり、一見して思うほど重大ではありません。

このようにして、エンケは1805年彗星について当時の観測データを詳細に再検討し、少なからぬ計算作業の後に、ようやく観測結果と一致度の高い楕円軌道の算出に成功した。これは、1806年にベッセルが1805年彗星について――疑義を表明しつつも――放物線軌道を算定・発表して以来、誰もなしえなかった快挙と言ってよい。

こうして1805年彗星について楕円軌道が算定され、それが1818年彗星の楕円軌道とよく似ていることが確認された。しかし、それだけでは両者の同一性の立証として不十分との受け止め方が一般的であった。すなわち、木星の影響による軌道変化がどの程度のものだったかを定量的に示さなければ、完璧な立証とは言えない。しかし、当時の理論天文学の水準では、木星による摂動を計算することは決して容易ではなかった。その点についてのエンケの成果は、次の5月12日付のガウス宛書簡で示されることになる。

4. エンケの1819年5月12日付のガウス宛書簡 ―― 両彗星の同一性の立証

エンケからの3月15日書簡に対して、ガウスは特に返事をしなかった模様である。その後、エンケは1805年彗星の軌道が木星の影響を受けてどう変化したかを計算し、それ以後の 4 回の近日点通過時に軌道要素がどう変わっていたかを調べた。そしてその結果を1819年5月12日付の書簡(以下「5月12日書簡」と呼ぶ)でガウスに報告した。その内容の概要は次の通りである[178]。

《 1818年彗星については1818年11月以前の観測データは存在しないので、1805年彗星のデータについて調べることにしました。楕円軌道の長半径の対数を0.34から0.37まで変化させても軌道はそれほど変化しなかったので、或る楕円軌道を仮定し、次のような軌道要素を得ました。

近日点通過時刻　1805年11月21.50637日　(パリ平均時)

近日点経度（ω）	156° 47′ 19″	(平均分点(1806 年))
昇交点黄経（Ω）	334° 20′ 05″	(〃)
軌道傾斜角（i）	13° 33′ 30″	
近日点距離の対数(lg q)	9.5320168	
長半径の対数(lg a)	0.3449907	
離心率(e)	0.84617529	
離心率の sin 表示(φ)	58° 06′ 45″.52	

この軌道要素は観測結果によく適合しました。(中略)

この軌道要素を用いて、木星による摂動の効果を計算しました。計算の簡略化のため 100 日の間隔ごとに軌道要素の変化を計算しました。その際、パラスの計算で用いたあなたの手順(Verfahren)[179]に従うとともに、木星の質量を 6.9717990[180]としました。また、ベッセルの公式[181]については、以前に私が犯した誤り[182]を今回は完全に見直しました。この 2 つのやり方は毎回よく一致する結果を与えてくれました。

最初は軌道要素を 1000 日ごとに修正し、次いで 1200 日ごとに、そして最後には 1300 日ごとに修正しました。そして次のような結果を得ました。

	1808 年 8 月 17.0 日 (パリ平均時)	1811 年 11 月 30 日 (パリ平均時)	1815 年 6 月 22 日 (パリ平均時)	1819 年 1 月 12 日 (パリ平均時)
元期の平均経度	96° 13′ 58″.2	96° 53′ 56″.04	127° 22′ 46″.2	158° 03′ 38″.4
近日点経度（ω）	156° 49′ 22″.9	156° 50′ 05″.7	156° 50′ 46″.1	156° 50′ 11″.6
昇交点黄経（Ω）	334° 18′ 57″.5	334° 18′ 55″.6	334° 18′ 18″.5	334° 18′ 11″.1
軌道傾斜角（i）	13° 36′ 53″.1	13° 37′ 07″.3	13° 37′ 05″.0	13° 36′ 14″.8
離心率の sin 表示(φ)	58° 01′ 08″.62	58° 02′ 00″.99	58° 02′ 29″.6	58° 00′ 36″.835
平均日々運動(O)	1080″.76016	1081″.96366	1081″.67418	1081″.33095
長半径の対数(lg a)	0.3441849	0.3438626	0.3439401	0.3440320

これによると、1819 年 1 月の近日点通過時刻は 1 月 7.92465 日となりますが、実際には 1 月 27.275 日なので、公転周期を 4.84 日増やす必要があります。そこで、$\log a = 0.3449907$ を $\log a = 0.3461541$ に変え、この微小な長半径の変化は木星による摂動に大きな影響を与えないと仮定すると、1819 年年頭における軌道要素は次のようになります。

近日点通過時刻	1819 年 1 月 27.27 日	
近日点経度（ω）	156° 59′ 30″	(平均分点(1819 年))

昇交点黄経（Ω）	334° 31′ 0″	（ 〃 ）
軌道傾斜角（i）	13° 36′ 35″	
離心率の sin 表示(φ)	58° 02′ 58″	
長半径の対数(lg a)	0.3451979	

さて、今度は、1818 年と 1819 年の観測データを基にして、長半径の対数を 0.345 と仮定し、マンハイムとゼーベルクの観測を以前よりも重視して計算したところ、次の結果を得ました。

近日点通過時刻	1819 年 1 月 27.27545 日	(ゼーベルク平均時)
近日点経度（ω）	157° 05′ 53″	(平均分点(1819 年))
昇交点黄経（Ω）	334° 43′ 37″	（ 〃 ）
軌道傾斜角（i）	13° 38′ 42″	
離心率の sin 表示(φ)	58° 06′ 45″.52	
長半径の対数(lg a)	0.3450000	

この軌道要素で計算すると観測との誤差は次のようになり、非常によい一致を示しました。

	赤経	赤緯	観測者又は観測地
1818 年 11 月 27 日	－ 25".7	－ 10".4	ポン
12 月 22 日	＋ 9".3	－ 21".7	マンハイム
23 日	＋ 2".3	－ 0".6	〃
24 日	－ 1".6	－ 5".9	〃
25 日	＋ 9".6	－ 26".3	〃
29 日	＋ 5".8	－ 23".8	〃
1819 年 1 月 1 日	－ 4".7	－ 6".1	ゼーベルク
4 日	－ 0".1	＋ 4".2	〃
5 日	－ 0".3	－ 7".0	〃
6 日	＋ 4".0	＋ 5".3	〃
12 日	－ 3".1	＋ 13".3	〃

》

エンケは、以上のような計算を通して、1805 年彗星が木星の影響を受けて変化した後の 1819 年初頭の軌道要素と、1818 年 12 月及び 1819 年 1 月の観測データを精査して得られた 1818 年彗星の軌道要素とが極めて類似していることを示した。もはや 1805 年彗星と 1818 年彗星が同一の彗星であることは疑う余地がないと言ってよい。

5. エンケの立証に関するガウスの承認と称賛

エンケから 5 月 12 日書簡を受け取ったガウスは直ちに 1819 年 5 月 24 日付の *GGA* にその内容を寄稿した[183)]。その記事の冒頭で、ガウスは、エンケが 1818 年彗星の周期性を立証したことを宣言し、「かかる太陽系に関する知見の増大が 19 世紀における最も注目すべき発見中に数えられることは疑いない」と称賛した。この記事は、1818 年彗星と 1805 年彗星が周期 3 年余の同一の周期彗星であるこ

とはエンケの計算で明白になったとしている。すなわち、木星の引力の影響[184)]をも考慮して計算した場合、1805 年彗星が 1819 年年頭において有するはずの軌道要素は、長半径の対数を 0.345 とおいたときの 1818 年彗星の軌道要素[185)]と極めてよく一致するとしている。なお、ガウスは、この彗星が 1805 年と 1818 年の間に 4 回でなく周期 4 年余で 3 回周回した可能性もあるわけだが、3 回周回を仮定した場合にはどの程度の一致度になるのか知りたいものだという趣旨のコメントを付している。

第 3 章　ガウスの関与についての検討

上で見たエンケの超短周期彗星の発見に関して、ガウスが行った関与としては、次の 4 点が挙げられよう。

①エンケからの 2 月 5 日書簡に対して、1818 年彗星と 1805 年彗星の同一性の証明に多大な労力を払う価値があると答えて、エンケの決心の後押しをしたこと。

②両者の同一性の証明のためには、木星の影響による摂動も計算しなければならないと指示したこと。

③エンケの計算した 1818 年彗星の楕円軌道要素を 1819 年 2 月の *GGA* に掲載し、1805 年彗星と同一の可能性があることを明らかにしたこと。

④エンケの 5 月 12 日書簡を受領して直ちに両彗星の同一性の立証がなされたと判定し、その旨を 1819 年 5 月の *GGA* に掲載して、エンケの功績を称賛したこと。

以上のうち，①と②については次のことが言えよう。第 3 部第 2 章 1 で見たように、エンケは 2 月 5 日書簡で「摂動の影響を見積もって 2 つの彗星が同一か別物かを明確に決定できるようにすることには、労力を費やす価値があるでしょうか？ それがいかに興味ある仕事だとしても、この大胆な推測という以上の確かな拠り所もなしにこの作業に着手することにはいささか躊躇します」と述べた。この文章からは、エンケが 1805 年彗星と 1818 年彗星が同一でないかと疑いつつ、その立証のために多大な労力を費やす価値があるのか自信を持てないままに、信頼する師であるガウスに後押しをしてもらいたい様子がうかがえる。

ガウスの返事如何によっては、エンケはその立証に着手することをあきらめたかもしれないと思われる。しかし、慧眼のガウスはさすがに事の重要性を察知し、第 3 部第 2 章 2 で見たように、1819 年 2 月 25 日のエンケ宛書簡で両彗星の同一性の立証に取り組むよう勧めたわけである。以上により、①は明らかであると言えよう。また、この書簡で木星の影響を計算する必要があることを明言しているので、②も明らかである。

ガウスはエンケから 2 月 5 日書簡を受け取ると（受け取ったのは 2 月 8 日～10 日前後と推定される）直ちにこれを公表する必要を感じた。そして、自分の所属するゲッティンゲン大学の紀要である *GGA* に寄稿して、1819 年 2 月 18 日付の号にエンケの計算した 1818 年彗星の楕円軌道要素を公表し、これが 1805 年彗星と同一の可能性があることにも言及した。これにより、エンケが最初に 1818 年彗星の楕円軌道の計算に成功したこと、および 1805 年彗星と同一の可能性を最初に指摘したことが公に確定された。すなわち③も明らかである。

ガウスはエンケから 5 月 12 日書簡を受け取ると、第 3 部第 2 章 5 で見たように、1819 年 5 月 24 日付の *GGA* に寄稿し、その中で、1818 年彗星が周期 3 年余の周期彗星であることをエンケが立証した旨を宣言し、「かかる太陽系に関する知見の増大が 19 世紀における最も注目すべき発見中に数えられることは疑いない」と称賛した[186)]。これにより、エンケが初の超短周期彗星の発見者であることが一般に認められることになったので、④も明らかである。

以上のほかにも、エンケによる超短周期彗星の発見に関してガウスが影響を与えたと考えられることがある。それは、摂動による軌道変化の計算方法である。

第3部第2章4で見たように、エンケは1805年彗星の摂動計算に当たって「ガウスの手順」と「ベッセルの公式」という 2 つの方法を用い、両者が一致することを確認して、自己の計算結果の信頼性を高めた。

ところが，1819年6月頃に刊行された或る天文雑誌の記事では「この軌道要素について（中略)、エンケ氏はベッセル氏の公式に従って100日ごとに摂動を計算し、以下の結果を得た。」と報じられていて[187)]、「ガウスの手順」は登場していない。これはなぜだろうか。この問題を次に取り上げよう。

第 4 章　ガウス秘伝の計算法について

彗星の軌道要素の変化の計算に関して、エンケはしばしば「ガウスが考案した計算方法」があることをほのめかしているが、その具体的な内容を論文の中で明らかにはしていない。例えば、1680 年の彗星の軌道要素を考察した 1818 年刊行の論文において、エンケは、或る積分の計算について「著名なる発見者がいまだ公に発表していないやり方(Art)により積分した」と述べている [188]。これは明らかに「ガウスの方法」を指しているのだが、エンケは論文の中でその具体的な積分の計算方法を示さず、ただ計算結果のみを述べている。

また，第 3 部第 3 章で見たように、或る天文雑誌の記事では、ベッセルの公式が挙げられているだけで「ガウスの手順」については触れられていない。このように「ガウスの方法」が秘匿されていた背景には次のような事情がある。

エンケは 1811 年から 2 年間、ゲッティンゲン大学でガウスの下で数学と天文学を学んだ。このときガウスは積分に関する或る計算方法をエンケに伝授するが、そのテーマについては，いずれガウス自身が論文を書くつもりなので、口外しないようにとエンケに指示した。エンケはその指示を 20 年間以上忠実に守った。その後、エンケは、1834 年 10 月 4 日付のガウス宛て書簡で、その計算方法の公表の許可を求め [189]、ガウスは 1834 年 10 月 13 日付のエンケ宛て書簡でそれを承諾する旨の返事をした [190]。

このような事情に照らすと、1819 年前後の刊行物の中で「著名なる発見者がいまだ公に発表していないやり方」と述べられたり、あるいは「ベッセルの公式」のみが挙げられて「ガウスの方法」には言及されなかったりした理由が理解される [191]。 そして、いずれにせよ、この「ガウスの方法」がエンケによる彗星の軌道や摂動の計算に少なからぬ貢献をしたことは確かである。

第 5 章　1820 年以降の展開

1. その後のエンケ彗星について

エンケは 1820 年に、次回に現れるエンケ彗星の近日点通過時刻を 1822 年 5 月 24.97 日と計算し、その前後の天体暦(Ephemeride)を公表した [192]。それによれば、同彗星の観測は南半球でないと難しいと思われた。オーストラリアのパラマッタ在住のカルル・ルートヴィヒ・クリスティアン・リュムケル(Carl Ludwig Christian Rümker, 1788-1862) は、1822 年 6 月 2 日にエンケ彗星の観測に成功し [193]、エンケの軌道計算の正しさが実証された。

また、エンケ彗星のその次の回帰について、エンケは、木星等による摂動の影響を考慮した上で、その近日点通過時刻を 1825 年 9 月 17 日と予測した [194]。実際の近日点通過時刻は同年 9 月 16.77 日だったという計算結果が後に示され [195]、エンケの計算の精確さが確認された。

2. 1826 年のビエラ彗星について

1826 年 2 月 27 日に北部ボヘミア在住のヴィルヘルム・フォン・ビーラ(Wilhelm von Biela, 1782-1856)は彗星を発見した。彼はこの彗星の軌道を計算し、これが周期 6.6 年の周期彗星であり、1772 年及び 1805 年に観測された彗星と同一であるという結論を得た。この結果は、直ちに『天文時報(*Astronomische Nachrichten*)』(以下”*AN*”と略す)の編集者のクリスティアン・ハインリヒ・シューマッハ(Christian Heinrich Schumacher, 1780-1850)に送られ、*AN* に掲載された [196]。

シューマッハは、この頃、自分が創設したアルトナ天文台の助手であるトーマス・クラウゼン(Thomas Clausen, 1801-1885)からこの彗星の軌道計算について報告を受けていたほか、マルセイユのジャン=フェリックス・ガンバール(Jean-Félix Adolphe Gambart, 1800-1836)からもこの彗星の軌道計算を知らせる書簡を受領していた [197]。そこで、この彗星が 1772 年及び 1805 年の彗星と同一であり、周期が約 6.6 年であることを最初に発見したのは誰かが問題となった。ガンバールからの書簡は 1826 年 3 月 22 日付であり、同書簡は、放物線軌道を仮定して算定した場合の軌道要素を示し、これを周期約 6 年半の楕円軌道とすると、1772 年、1805 年、1826 年の彗星の観測を満足させるだろうと指摘していた。

また、ビーラからの書簡は 1826 年 3 月 23 日付であり、やはり放物線軌道を仮定して算定した場合の軌道要素を示した上で、これを周期 6 年 9 月余の楕円軌道とすると、1772 年、1805 年、1826 年の彗星のどの観測ともよく一致することを指摘していた。

クラウゼンは、3 月 20 日までの観測に基づいて周期を 1265 日(=3.46 年)とする楕円軌道を算定したが、その後、3 月 28 日までの観測に基づいて周期を 2438 日(=6.67 年)とする楕円軌道に修正した。シューマッハは、このような事情に鑑み、まずクラウゼンの優先権は否定されるとし、ガンバールとビーラのいずれに優先権を与えるべきかについては、さらに諸事情が明らかになるまで判断できないと述べた [198]。

ビーラは、その後、1826 年 4 月 7 日付の書簡をシューマッハに送り、自分は 3

月 15 日にこの彗星の軌道が 1772 年及び 1805 年の彗星と同じであることに気が付き、同日にその放物線軌道要素をプラハに送付したと述べた[199]。そして、さらに、この彗星の発見は決して偶然ではなく自分が以前から予測しており、そのことは1825年用天文年鑑(1822年刊行)184頁・259頁及び1827年用天文年鑑(1824年刊行)207 頁[200]に記載されていると主張した。ビーラの計算によれば、この彗星は 1772 年 1 月 20 日から 1805 年(1806 年との表記は 1805 年の誤りと解される)12 月 31 日まで、6 年 9 か月 8 日の周期で 5 回周回したと考えられるが、その後、6 年 9 か月 14 日の周期で 3 回周回したと考えると、1826 年 3 月 15 日に回帰することになる。そして、この結果はプラハ大学のフランツ・ハラシュカ教授(Franz Ignatz Cassian Hallaschka, 1780-1847) やプラハ在住のアマチュア天文家のヨーゼフ・モルスタット氏(Josef Morstadt, 1797-1869)にたびたび伝えていたとしている。

その後、クラウゼンもガンバールも特にこの彗星が 1772 年及び 1805 年の彗星と同一であることの発見について自己の優先権を主張することはなかった模様であり、ビーラの優先権が一般に認められていったようである。その背景として、①1826 年に再び現れたこの彗星を同年 2 月 27 日にビーラが最初に発見したことは争いがない、②1772 年と 1805 年の彗星が同一であり、その周期は 6 年余であって、1826 年に回帰するという予測を既に 1824 年にビーラが公表していた、などの事情を指摘できよう。

なお、ビエラ彗星は1852年の回帰を最後として観測されなくなり、分裂・消滅したものと考えられている。

3. エンケ彗星発見の影響について

ビーラは彗星の回帰について関心を寄せ、過去に観測された諸彗星の中に数年程度の周期で回帰しているものがないかを調べたが、そこには明らかにエンケ彗星発見の影響がうかがわれる。彗星に関するビーラの諸推測の中には誤っているものも少なくないが、1805 年第 2 彗星が 1772 年の彗星と同一であり、その周期が6年余であって1826年10月に回帰するとの予言（1824年）は、かなり的を射ていたと評し得る[201]。このように、エンケ彗星の発見はビエラ彗星の発見の土台となったということもできよう。

ビエラ彗星は、その後、太陽や地球に近づくことによって分裂し、消滅してしまったが、そのような天文現象が史上初めて把握されたのも同彗星の軌道を精確に計算できたからである。このように天文学史上極めて注目に値するビエラ彗星の発見という出来事もエンケ彗星発見の延長上にあると言えよう。

また、エンケ彗星自体についても、その周期が少しずつ短くなる現象が 1823 年にエンケによって指摘されている[202]。これは非重力効果の一種であり、現在ではその原因は彗星の核からの物質の放出や核の自転の影響等に求められている。このように彗星に関する近代的な天文学の発展を促した点でもエンケ彗星の発見は後世に大きな影響を与えたといえよう。

第 6 章　エンケ彗星のまとめ

これまで見てきたように、エンケが 1810 年代末に史上初の超短周期彗星の発見という偉業を達成できた理由ないし原因としては、師ガウスによる支援の存在が大きかった。しかし、その他にもいくつかの要因を指摘することができる。

その第 1 は、この頃までに天体の軌道計算の理論や技術が進展し、比較的短期間の観測データから天体の軌道を正確に計算することが可能になっていた、という事実である[203)]。

第 2 は、偶然的な要素であるが、ちょうどこの頃に超短周期彗星が観測可能な位置に登場し、当時の天文学者たちの観測網に捕らえられたという事実である。

第 3 に、これも偶然的な要素であるが、エンケと同等またはそれ以上に天体の軌道計算の能力と実績を有していたベッセルがたまたまエンケ彗星を観測できなかったことである。ベッセルはその頃現れた他の彗星（1818 年第 2 彗星）の観測に成功し、その彗星の軌道計算に従事した[204)]。しかし、この彗星は放物線軌道を描く、特に珍しくない非周期彗星であったために、この彗星の軌道計算は 1818 年彗星ほど世間の注目を集めなかった。エンケがいち早く 1818 年彗星の軌道計算に乗り出すことができたのは、エンケ自身が 1819 年 1 月前半にこの彗星を観測できたことが大きい。もし、この頃、エンケが 1818 年彗星を観測できず、代わりにベッセルが観測していたらどうだったであろうか。ベッセルも彗星の軌道や摂動を計算する能力を十二分に持ち合わせていたのだから、ベッセルが初の超短周期彗星の発見者になった可能性は十分あったと考えられる。

このように、エンケが史上初めて超短周期彗星を発見できた要因として、幾つかの偶然的な要素を挙げることは決しておかしくないであろう。

第 4 部　総括的考察

第 4 部では、本論文の総括として、まず第 1 章において、本論文の中心的テーマだった各種の軌道計算法の精度の問題を取り上げ、1819 年までの進展の様子を検証するとともに、その進展が史上初の超短周期彗星の発見に大きく貢献したことを明らかにする。次いで第 2 章において、軌道計算の精度向上のために不可欠だった最小二乗法が具体的にどの時期から誰によってどのように使用されたのかという問題を検証する。最後の第 3 章では全体の最終的な総括を行う。以上の考察を通じて、軌道計算法の観点から史上初の超短周期彗星の発見の歴史を明らかにするという本論文の試みが明確に提示され、完結するであろう。

第 1 章　軌道計算の精度の変遷

本論文では、第 3 部まで、エンケが 1819 年に史上初の超短周期彗星を発見するまでの歴史的な過程を軌道計算法と関連させつつ考察してきた。そして、エンケが超短周期彗星を発見できた理由の 1 つとして、彼の軌道計算の精度が十分に高かったことを挙げた。そのことを念頭においた上で、本章ではニュートンからエンケに至るまでの各種の軌道計算法における精度を吟味し、その向上の歴史を確認しておきたい。

1. ニュートンの軌道計算法の精度について

ニュートンは著書プリンピキアの中で彗星の放物線軌道を計算する方法を論じ、その「実例」として 1680 年の彗星を取り上げた。彼は、自分の算定した軌道に基づき、4 個の観測を選んで、その計算された経度・緯度と実際に観測された経度・緯度との差を調べた。その結果は、4 個の経度について 0 分ないし 2 分の誤差、4 個の緯度について 0 分ないし約 10 分の誤差であった [205)]。次いで、ニュートンは、ハレーによるより精確な軌道計算を紹介し、それによれば 16 個の観測について見られる計算と観測との誤差は、経度につきすべて約 3 分以内、緯度につきすべて 2 分半以内に収まることを示した [206)]。さらに、ニュートンは、過去約 1700 年以内に現れた 4 個の彗星と 1680 年の彗星がすべて同一であることをハレーが見出したと述べ、そこからこの彗星の周期は 575 年と算定されるが、それを前提とした楕円軌道によれば、計算と 21 個の観測との誤差が、経度につき概ね 2 分以内（約半数が 1 分以内）で、緯度についても概ね 2 分以内（約 6 割が 1 分以内）になるという「良好な」結果を示した。

1680 年の彗星の周期は、その後の研究で、6 千年～1 万 4 千年程度と見込まれているので [207)]、ハレーの 575 年という結論は全く誤っていたことになるが、それにもかかわらず計算と観測の位置の誤差は 1～2 分程度に収まり得るという点に注意しなければならない。これは、周期彗星の場合、計算された経度・緯度と観測された経度・緯度との間に 1～2 分程度の誤差があると、計算された周期は全く信用できないことを意味する。

いずれにせよ、18 世紀初め頃の時点において、ニュートンやハレーらの軌道計算の技術は、良好な観測データが十分あれば、任意の時刻における彗星の経度・緯度を概ね 2～3 分程度の誤差で算出できる実力を有していたと評価できよう。

2. オイラーとレクセルの軌道計算法の精度について

第1部で見たように、オイラーは、自分が1769年彗星の軌道の計算のために用いた方法によれば、昇交点黄経、軌道傾斜角、近日点経度の誤差は2～3分以内に収まるとしていた。もちろんこれだけでは、彗星の計算された経度・緯度と観測された経度・緯度の差異は分からないが、オイラーは同彗星の1769年9月3日の位置について、計算と観測の誤差は地心経度が16秒、地心緯度が2分28秒という試算を示している[208]。彼は観測時の誤差や近似計算の誤差等のためにこれ以上の高い精度は難しいだろうと述べているので、経度・緯度の誤差が1～2分程度なら満足できると考えていたと思われる。但し、オイラーは、このレベルの精度では楕円軌道の場合の周期を精確に求めることはできないと明確に断っている[209]点に注意する必要がある。

次に、オイラーの軌道計算法を基本的に受け継いだとされるレクセルによる1770年彗星（レクセル彗星）の軌道計算のケースを見よう。レクセルが最終的に得た軌道要素によると、黄経・黄緯の計算値と観測値の誤差はいずれも30～40秒以内に収まるものが半数以上であり、誤差が1分を超えるものは2～3割程度しかない[210]。これは相当に立派な結果である。しかし、第1部第3章で見たように、この軌道要素は、何通りもの長半径あるいは周期を試して最も観測値と乖離の少ないものを選ぶといういわば帰納的な方法によって得られたものであり、例外的に多数の観測データが得られた1770年彗星だから取り得た方法であった。したがって、概ね誤差1分以内程度の精確な軌道を常に与え得るような軌道計算法をレクセルが有していたと評価することはできない。むしろ、信頼できる多数の観測があれば、何通りもの長半径を仮定して結果を比較することにより、後にガウスが考案したような理論的に高度な楕円軌道計算法を用いなくても、相当に精確な周期が得られることをレクセルが実証したと考えるべきである。

3. オルバースの軌道計算法の精度について

第2部第2章で見たように、オルバースは1797年に刊行した著書においてそれまでに多くの天文学者たちによって提案された彗星の放物線軌道の計算法を通覧し、従来よりも優れた計算法を提示・確立した。彼の著書における、具体的な彗星について計算値と観測値とを比較したデータは余り多くない。また、オルバースの計算法は基本的な計算の方針を示したものとも言え、実際に計算する際には、近似の仕方等によって、異なった数値が得られることは十分に考えられる。したがって、彼の軌道計算法の精度を一律に評価することはできないが、彼の計算に従ったと思われる軌道計算例を見れば、或る程度の評価が可能であろう。

例えば、第2部第3章7で見たように、1804年3月に発見された彗星について、ガウスはオルバースの方法でその放物線軌道を計算しているが、そのときの計算値と10個の観測値との誤差は、2～3個の例外を除き、赤経が30秒以下、赤緯が90秒以下に収まっている[211]。すなわち、オルバースの軌道計算法によれば、放物線軌道は概ね1分前後の誤差で彗星の位置を算出できるケースが多かったのではないかと推測される[212]。

4. ガウスの軌道計算法の精度について

ガウスの軌道計算法の精度に関しては、(1)ケレスやパラス等の小惑星について、(2)放物線軌道の彗星について、(3)楕円軌道の彗星について、の 3 種類に分けて考察する必要がある。

(1) 小惑星について

ガウスは 1801 年 11 月にケレスの楕円軌道の計算に成功し、1801 年 11 月 25 日から 12 月 31 日までのケレスの予想される地心黄経と地心黄緯を公表した（第 2 部第 3 章 3 参照。これは第 3 次の軌道要素である）[213)]。また、ガウスは、その後に得られたケレスの観測データを取り入れて、次々と軌道の改良を重ねた。それらの軌道要素に基づく計算された経度・緯度と観測された経度・緯度の誤差について、ツァッハは次のように指摘している [214)]。

①第 5 次の軌道要素によると、赤経の誤差は、1801 年 12 月 7 日の観測において＋24 分 8 秒、1802 年 1 月 11 日の観測において＋30 分 53 秒、1 月 16 日の観測において＋31 分 53 秒である。

②第 4 次の軌道要素によると、上記の 3 つの赤経の誤差は、概算でそれぞれ＋14 分 30 秒、＋19 分 45 秒、＋20 分 30 秒である。このように第 5 次の方が精度が悪いことについて、ガウス博士は、偶然だろうが他の惑星による摂動の可能性もあるとしている。

③第 6 次の軌道要素によると、上記の 3 つの赤経の誤差は、それぞれ＋3.0 秒、＋19.3 秒、＋9.9 秒であり、また、1802 年 1 月 22 日の観測において＋20.1 秒、1 月 25 日の観測において＋27.3 秒である。

④第 7 次の軌道要素によると、1801 年 12 月 7 日から 1802 年 2 月 6 日までの 14 個の観測のうち、赤経の誤差は、10 数秒のものが 3 個あるが、それ以外はすべて 8 秒未満に収まっている。また 6 個の観測において赤緯の誤差が算定されたが、それらは 14 秒から 36 秒の間に分布しており、赤経に比べて相当大きい値を示している。

これらの数字を考慮すると、ガウスが 1801 年秋に初めて編み出した楕円軌道の計算法はケレスについては、2 か月程度の観測データがあれば数秒ないし 20～30 秒程度の精度でその経度・緯度を求めることができたと見てよいであろう。

また、第 2 部第 3 章 5 で見たように、1802 年 3 月に発見された 2 番目の小惑星パラスについても、ガウスは概ね数秒以内の誤差で軌道要素を計算することに成功している。すなわち、ケレスやパラス等の小惑星については、ガウスの軌道計算は当初から極めて精確なものであったと評価できよう [215)]。

(2)放物線軌道の彗星について

ガウスは放物線軌道を描く彗星についてどの程度精確な軌道計算を行っていたのであろうか。第 2 部第 3 章 7 で見たように、ガウスが計算した 1804 年彗星の放物線軌道の誤差は経度・緯度共に 20～30 秒ないし 1 分以上のものが多く、小惑星の楕円軌道に比べて精度は格段に落ちている。

また、1807 年の大彗星について、ガウスは 1807 年 12 月 17 日から 1808 年 1 月 31 日までの間の 7 個の観測について、放物線軌道で計算した場合の赤経との

誤差を示している（赤緯については5個）[216]。それらの誤差のほとんどは18秒から1分の間にある。すなわち、ここでも精度は小惑星の楕円軌道より格段に悪い。

このように、放物線軌道の場合、ガウスの軌道計算の誤差は数秒程度に収まるものでなく、1分程度の誤差は普通だったことに注意する必要がある。

(3)楕円軌道の彗星について

ガウスが計算した彗星の楕円軌道の例としては、1805年第2彗星（ビエラ彗星）と1815年のオルバース彗星がある。

第2部第5章で見たように、ガウスは1805年第2彗星について楕円軌道を計算したが、その周期を約4.74年（実際には約6.6年）とかなり誤って算定した。同じ楕円軌道であるケレスやパラスの軌道計算においては数秒程度の誤差しか生じなかったことと比較すると、非常な相違があると言わざるを得ない。

しかし、ガウスも1815年のオルバース彗星の楕円軌道については、周期77.5年（実際には70年程度）と概ね妥当な周期を算出している。10年前の1805年第2彗星の時と比べて、何らかの点でガウスの軌道計算技術が進歩したかと思われるものの、詳しい計算過程などは公表されていないので、詳細は不明である。

(4)まとめ

以上見たように、ガウスの軌道計算法の精度に関しては、場合を分けて検討する必要がある。彗星の放物線軌道の場合は1分前後の誤差は普通だが、楕円軌道の場合は小惑星と彗星とで大きく異なる。すなわち、小惑星の場合は短期的には数秒程度の誤差しか生じないが、周期彗星の場合にはガウスと言えども周期の精確な算定には相当の困難あるいは労苦が伴なったと評さざるを得ない。

5. ベッセルの軌道計算法の精度について

ベッセルが彗星の軌道計算を始めるのは1804年頃からである[217]。第2部第4章2で見たように、ベッセルは1805年第1彗星（エンケ彗星）の軌道を放物線軌道として計算したが、当初の軌道計算では黄経の誤差は1分から2分程度のものが過半数を占め、その精度はかなり悪かった。その半年後に行った軌道計算でも、経度の誤差が1分以内のものは3分の1程度に過ぎず、3分を超えるものも多数あったので、決して良好な結果ではなかった。この彗星の観測期間は31日間と比較的短かった上、精度のよくない観測も多かった模様であるし、そもそもこの彗星は楕円軌道を描いていたのであるから、この精度の悪さを直ちにベッセルの計算技術の低さに帰するのは適当でない。また、当時はガウスがまだ楕円軌道の計算法を公表していなかったので、ベッセルが彗星の楕円軌道を計算できたかは明確でない。

1805年末には引き続いて1805年第2彗星（ビエラ彗星）が現れた。第2部第5章で見たように、この彗星は発見直後から1772年の彗星と同一ではないかと指摘されていた。ベッセルはこの彗星について、最初まず放物線軌道として計算した[218]。その後、彼は、両彗星の同一性を検討するために、周期33年の楕円軌道を仮定して両彗星の軌道要素を算定・比較したが、相違が大き過ぎて両者は同一の彗星でないと判断した[219]。

ベッセルの軌道計算に関して注目されるのは、1807 年に刊行された 1769 年彗星の楕円軌道に関する論文である [220]。この彗星については第 1 部第 1 章で見たように、オイラーが詳細な軌道計算を行って周期が 500 年弱の楕円軌道を算定していた [221]。ベッセルは当時の観測データを精査し直し、特に光線の屈折を考慮して、各緯度・経度の数値をそれぞれ数十秒から 2～3 分程度増減した [222]。こうして得られた値に基づき、またガウスが 1804 年に発表していた軌道計算式を発展させて諸量の微分の関係式を導くなどして、計算を繰り返し、最終的に相当精度の高い楕円軌道に到達した [223]。その周期は、一応、2089.8 年と算定されたが、もし観測に 5 秒の誤差があれば、周期は 2673.0 年から 1691.6 年の間となるとしている [224]。

1807 年彗星の軌道決定を論じたベッセルの 1810 年書は、軌道計算に関する彼の実力を如実に示している。第 2 部第 7 章で見たように、1807 年彗星についてベッセルは軌道要素を 6 回求めている。そのうちの軌道要素Ⅲまでは放物線軌道だが、ベッセルは、軌道要素Ⅲについて、赤緯が平均して観測値より 64 秒過大だったから放物線軌道は否定されるとしている。すなわち、ここでは 1 分を超える誤差は受け入れ難いと感じられていると言えよう。そして、軌道要素Ⅳの赤経・赤緯及び軌道要素Ⅴの赤経においては 10 秒～15 秒以内の誤差が 6 割～7 割を占めたので、相当に良い精度と思われるが、ベッセルはなおこれに満足することなく、最小二乗法を用いて軌道要素Ⅵを計算している。この最後の軌道要素Ⅵでは、選定した 6 個の基準点において黄経はすべて 5 秒以下、黄緯はすべて 7 秒以下という良い精度を得ている [225]。1810 年書は実際に最小二乗法を用いて軌道計算を行ったことを明示した最初の例であり、しかもそれによって精度の改良に成功していると評価できる点で画期的な意義を有すると言えよう。

また、1815 年のオルバース彗星について、ベッセルは最終的に 10 個の観測との誤差を赤経は 1 個を除いて 6 秒以下、赤緯は 1 個を除いて 5 秒以下まで減らすことに成功した [226]。

このように、ベッセルは 1810 年以降、十分な観測データがあれば、彗星の楕円軌道については概ね数秒以内の誤差で彗星の軌道計算をできる能力を有していたように思われる。もっとも彗星の放物線軌道は別論で、誤差が数分程度になることも珍しくなかったようである [227]。

6. ニコライの軌道計算法の精度について

ニコライは、第 2 部第 9 章で見たように、1813 年論文において 1811 年第 2 彗星の楕円軌道を計算し、5 個の基準点の黄経・黄緯について、最小二乗法適用前の段階では概ね 10 数秒以内の誤差を得、また、最小二乗法適用後の段階では概ね数秒程度の誤差を得た [228]。これは相当に良い精度であると言えよう。但し、これはこの彗星が観測された 2～3 か月の間の軌道を精確に計算できたというにとどまるのであって、周期をどの程度精確に算定できたかは保証されていない点に注意しなければならない [229]。

7. エンケの軌道計算法の精度について

第 2 部第 10 章 1 で述べたように、エンケはポンス・ブルックス彗星(1812 年)の軌道について何通りかの計算結果を示している。1813 年にはガウスの指導の下で 3 つの基準点を選んで放物線軌道を求めようとしたが成功せず、むしろ周期 72.5 年の楕円軌道が得られた(1816 年まで未公表)。この軌道で計算すると、赤経・赤緯の 8 割程度が 50 秒以内の誤差に収まった。ここでは最小二乗法は用いられていない。1816 年には 5 つの基準点を選び、最小二乗法を用いて放物線軌道を算定した。その結果は、5 つの基準点において赤経・赤緯とも 30 秒から 2～3 分の誤差を示した。次に、上記の 1813 年算定の楕円軌道要素に対して最小二乗法を適用して修正を加えたところ、5 つの基準点における誤差は赤経が 10 秒以内、赤緯が 20 秒以内に収まり [230)]、また、周期は 70.6855 年と算定された。

エンケの論稿で注目されるのは、1818 年に刊行された、1680 年の彗星の軌道決定に関する論文である [231)]。この彗星については、ニュートン、ハレー、オイラー、パングレ等、多くの天文学者が軌道計算を行っているが、エンケは当時の観測記録を丹念に分析・修正し、最小二乗法を用いて 8813.8 年の楕円軌道を算定した [232)]。この軌道は観測との誤差が赤経・赤緯とも 8 割以上が 1 分以内に収まっており [233)]、相当に良好な結果と言える。もっとも、「誤差の可能範囲」を考慮すると、周期は 6179.3 年から 14030.6 年の間とされ、その範囲は余りに広い。いずれにせよ、この論文は、種々の軌道を仮定した場合にその誤差の二乗和を計算してその信頼性を比較検討するなど、従来の軌道計算論を一段とレベルアップさせた感がある。このように軌道計算の技術を確実に身につけた結果、エンケは 1819 年に史上初の超短周期彗星を発見することができたと言えるであろう。

なお、1817 年 12 月 26 日に現れた非周期彗星に関して、エンケは 1818 年に最小二乗法を用いてその放物線軌道を計算した [234)]。1818 年 1 月 18 日から 5 月 1 日までの間の約 20 個の観測につき計算値との誤差は、赤経・赤緯とも約 9 割が 1 分以内に収まった。しかし赤経・赤緯とも 10 秒以内の誤差は 3 分の 1 ほどに過ぎず、最小二乗法を用いた割には楕円軌道の場合ほど精度はよくない印象を受ける [235)]。

8. 小括

これまで見てきたように、彗星や小惑星の軌道計算の精度は時代とともに向上してきた。17 世紀のニュートンの時代には彗星の経度・緯度が 2～3 分程度の誤差で算出できたと考えられる。18 世紀後半のオイラーは、経度・緯度の誤差が 1～2 分程度なら満足していた。彼の弟子であるレクセルは、レクセル彗星の楕円軌道という特殊なケースではあるが、経度・緯度の誤差を、相当に高い割合で 1 分以内に収めることに成功した。また、多数の観測データと照合することにより、約 5 年半という周期をほぼ精確に算定することができた。18 世紀末にはオルバースが放物線軌道の計算法を大幅に改良するが、その計算法によると概ね 1 分前後の誤差で彗星の放物線軌道の位置を計算できたと考えられる。

19 世紀に入ると、ガウスが楕円軌道の計算法を考案した。彼の計算法によれば小惑星の軌道については数秒程度という極めて高い精度で算定できたが、周期彗星の周期の算定は決して容易でなかった。また、放物線軌道の計算についてはオ

ルバースの方法に従っていて、その精度は 1 分前後だったと考えられる。
1806 年頃から頭角を現したベッセルは軌道計算において異彩を放っていた。彼の 1810 年書は、刊行された文献の中では初めて軌道計算に最小二乗法を使用した。また、木星等による摂動の影響を考慮した軌道計算を初めて行った。既に見たように、ベッセルが最小二乗法を使用して行った楕円軌道の計算では、しばしば誤差は数秒以内に収まっている。但し、放物線軌道では必ずしもそのような高い精度は得ていない点に注意する必要がある。
1810 年代になると、ニコライやエンケの活躍が始まった。ガウスの薫陶を受けた彼らは、最小二乗法の使用などの細かな計算を敬遠したように見えるガウスと異なり、積極的に最小二乗法を駆使して数秒レベルの精度を追求した。その成果は楕円軌道について顕著だが、放物線軌道については数十秒程度の誤差の克服がなお容易でなかった。
なお、以上のような軌道計算法の精度とは別に、観測の精度の問題も考慮する必要がある。観測の精度は観測施設や観測者ごとに異なるので、一概に言えないが、オイラーは観測誤差として 1 分程度を想定する場合が多かった。エンケの頃には 5～10 秒程度の観測誤差なら通常の範囲内と感じられたようである。
軌道計算の精度を検討する場合には摂動の問題を避けることができない。精確に計算すると、2～3 か月の観測期間の間にも木星等の影響を受けて彗星の軌道要素が
変化する場合が少なくない。ベッセルはこのような摂動の影響を積極的に軌道計算に取り込んだ。また、ガウスは摂動を計算する理論的方法を研究した [236)]。そしてそれらの成果は、第 3 部で見たように、1819 年にエンケが史上初の超短周期彗星を発見する際の強力な武器となった。
上述のように、1810 年以降に頻繁に使用されるようになった最小二乗法は軌道計算の精度向上に大きな役割を果たしたのであるが、この最小二乗法については多くの論点が存在するので、以下に章を改めて検討しよう。

第 2 章　軌道計算における最小二乗法の使用について

最小二乗法の原理を誰が最初に発見したのかは明確でない。刊行された文献において最小二乗法の原理を最初に主張したのはルジャンドルで 1805 年のことである。ガウスは 1809 年刊行の『天体運動論』の中で自分はこの原理を 1795 年から既に使っていたと述べたため、その当否を巡って論議が起きた[237]。ここでは、最小二乗法の最初の発見者が誰であるかについては深入りせず、軌道計算において最小二乗法がどのように使用されたかを文献から確認できる範囲で検証することにしたい。

1. ガウスの場合

(1) 1802 年論稿について

第 2 部第 3 章 6(3)の最後で指摘したように、ガウスは 1802 年論稿の末尾で「観測が既に数年間に及び、その軌道要素が微小な所まで決定されている場合には、任意の個数の観測を基礎に置くことができる微分変化の使用が最良の手段と考える。」と述べている[238]。この文章だけからでは、これが最小二乗法を指すことが明白だとは言えないかも知れない。しかし、その後の『天体運動論』や 1811 年論文あるいは彼の書簡や草稿メモ等を参照すると、ガウスがケレスの軌道計算に取り組んだ 1801 年当時から軌道改良の一方法として最小二乗法を想定していたことは確かであってそれがこの文章に現れているように思われる。そのいわば状況証拠として、次の諸点が挙げられる。

①1802 年論稿においても『天体運動論』においても、最初に(近似的に)軌道要素を求める段階では最小二乗法は一切登場しない。『天体運動論』で最小二乗法が登場するのは第 2 部第 3 章であり（第 172 節～第 189 節)、軌道決定の計算法の考察が一通り終わって後である。

②1806 年 7 月 8 日付のツァッハ宛書簡において、ガウスは、「最小二乗法の原理は本質的に自分の方法に属するものでない」と述べている。もし、最初の軌道決定の段階から最小二乗法が重要な役割を担うならば、この言葉は明らかに矛盾する。しかし、軌道改良の段階になって初めて最小二乗法が使われるのであれば、この表現はぴったりと当てはまる。

③1811 年論文は、最小二乗法を用いた軌道計算の仕方をガウスが明示したほとんど唯一の例であるが、そこでは、パラスの軌道要素をまず算出するという最初の段階で最小二乗法は登場せず、その後の軌道改良を行う段階で初めて最小二乗法の使い方が説明されている。

④最小二乗法は、理論的には、多数の観測に基づいて軌道要素を算定する最初の段階から適用することができると思われるが、ガウスはケレスやパラスのような小惑星を念頭に置いていたこともあり、数年かけて楕円軌道が摂動等により変化した場合にその軌道を改良するための手段として最小二乗法を位置付けている。そしてこのようなガウスの態度は、1802 年論稿でも『天体運動論』でも 1811 年論文でも一貫している。

(2) ガウスの最小二乗法使用の実例

上記のように、ガウスは既に 1802 年論稿で軌道計算における最小二乗法の使

用を視野に入れていたと考えられるのであるが、彼が実際に最小二乗法を使用して軌道計算を行った例は意外に少ない。文献でそれが明確に確認できるのは 1811 年論文のパラスの軌道計算のみである。それ以前には、1802 年論稿において数年にも及ぶ摂動の影響などを受けて軌道を改良する場合に「微分変化の使用」が最良である旨が一般論として述べられ、また、『天体運動論』では最小二乗法に関する理論的研究がなされているが、いずれも具体的な天体の軌道を計算しているわけではない。また、1811 年論文以降、ガウスの弟子であるニコライやエンケは彗星の放物線軌道や楕円軌道を算定する際に積極的に最小二乗法を用いてできるだけ精確な軌道要素を求めようとしているが、ガウスは詳細な計算は若手に任せたいとすることが多く、最小二乗法を使った改良結果を報告した例はほとんど見受けられない [239)]。

結局、ガウスがルジャンドルに先がけて最小二乗法を認識していたことは間違いないと考えるべきであるが、少なくとも軌道計算の分野では 1805 年のルジャンドルの著書の刊行より前にガウスが小惑星にせよ彗星にせよ「微分変化を用いた最小二乗法」を使用して軌道計算を行った事実は確認できず、むしろ行っていない可能性が非常に高いと思われる。但し、「微分変化を用いない最小二乗法」は別論である。ガウスの書簡によれば、1802 年秋にケレスの第 8 番目の軌道要素を算定するに際して、ガウスはそのような最小二乗法を使用した可能性がある [240)]。いずれにせよ、ガウスは最小二乗法をそれほど重視していたわけでなく、「軌道を数年後に微調整する際の最良手段」としか位置付けていなかったのだから、1805 年以前に軌道計算に最小二乗法を使った証拠を提出できなかったのも無理はないと考えられる [241)]。

2. ベッセルの場合

ベッセルが軌道計算に最小二乗法を用いたのは 1810 年書が最初である。同書は前年に刊行されたガウスの『天体運動論』を随所で参照しているが、最小二乗法についても『天体運動論』の第 2 部第 3 章第 179 節を引用している。ベッセルは 1807 年彗星の観測データの中から 6 個の観測を選び出し、それを基に算出した第 5 番目の軌道要素から木星等の惑星の引力による摂動分を差し引いた。そして得られた修正後の軌道要素に基づく計算値と観測値との差の二乗和が最小となるような軌道要素の修正値の組み合わせを最小二乗法によって求めた [242)]。

その後の数年間、ベッセルが彗星の軌道計算で最小二乗法を用いた例は明らかでない。第 2 部第 10 章 2 でオルバース彗星についてベッセルが相当に良好な軌道計算を行ったことを述べた。その計算についてベッセルは最小二乗法の使用を明言していないが、彼の説明を見ると最小二乗法を用いて詳細な軌道計算を行った可能性が高いように思われる [243)]。

3. ニコライの場合

第 2 部第 9 章で見たように、ニコライは 1813 年論文において 1811 年の彗星の軌道を最小二乗法を用いて精確に計算することに成功した。また第 2 部第 10 章 2 で見たように、ニコライはオルバース彗星についても最小二乗法を用いてその軌

道の改良に成功している[244]。

4. エンケの場合

第2部第10章で見たように、エンケが軌道計算に関する本格的な論稿を書いたのはポンス・ブルックス彗星に関する1816年の論文が最初だった。その論文では最小二乗法を使用した精緻な検討がなされている。また、前章7で述べたように、エンケは、1817年12月26日に発見された非周期彗星の放物線軌道についても、最小二乗法を使用した結果を発表している。

1818年彗星と1805年彗星の同一性の実証に当たり、エンケが最小二乗法を駆使して精度の高い計算を行ったのは第3部第2章で詳しく見た通りである。エンケは1819年6月12日に発見された彗星(ポンス・ヴィネッケ彗星)について何度か軌道計算を行うが、最終的には最小二乗法を用いて周期5.62年というかなり精確な楕円軌道の算定に成功した[245]。また、彼は1819年11月28日に発見された彗星(ブランペイン彗星)の軌道計算についても最小二乗法を用いて周期4.81年の楕円軌道を算定した[246]。

以上のように、エンケは、彗星の軌道計算に際して、ベッセルやニコライ以上に頻繁に最小二乗法を用いていると言えよう。

5. 小括

最小二乗法は、ガウスの『天体運動論』でその原理が紹介されベッセルの1810年書で計算の実例が示された後も、直ちに標準的な軌道計算法として広く普及したとは言えない。ガウス自身、1811年論文を除くと、軌道計算に最小二乗法の使用を明示した例はほとんど見出すことができない。また、ベッセルの場合も、1810年書とオルバース彗星のケースを除くと、最小二乗法の使用を明示した軌道計算の実例を1810年代に見出すのは困難である。ニコライの場合も、1811年の彗星とオルバース彗星以外に最小二乗法の使用を明示した軌道計算の実例は見出し難い。

以上に対して、エンケは、自分が手掛けた軌道計算の多くにおいて最小二乗法の使用を明示している[247]。最小二乗法は計算が面倒な割には微小な修正がなされるだけであるから、考えようによっては労力に見合わない計算法かも知れない。しかし、そのような労力をいとわず常に少しでも真の値に迫ろうとするひたむきな態度こそが史上初の超短周期彗星の発見という栄誉をエンケにもたらしたと言えるであろう。

第 3 章　最終総括

本論文は、史上初の超短周期彗星の発見が、いつ、誰によって、どのようになされたのかを中心的なテーマとして考察を重ねてきた。史上初めて発見された周期彗星は有名なハレー彗星であるが、同彗星は、過去の記録から 75 年程度の周期で定期的に同じような位置に到来する彗星の存在が分かり、それを手掛かりとして発見された。その際にはエドモンド・ハレーによる軌道計算の技術も重要な役割を果たしたことは否定できないが、当時の軌道計算法だけで周期 75～76 年を算出することは無理だったと思われる。

最初に超短周期彗星発見のチャンスに遭遇したのは 18 世紀後半のレクセルだった。彼は 1770 年に 1 回だけ出現した彗星(レクセル彗星)の観測記録に基づいて、約 5 年半の周期を含めその軌道をほぼ精確に算定したと考えられる。それ故、レクセルが史上初の超短周期彗星の発見者になっても不思議はなかった。しかし、この彗星はその後、木星の影響で軌道が大きく変わり 2 度と観測されることがなかった。そのため、同彗星は周期彗星として公認されず、レクセルは史上初の超短周期彗星の発見者の地位を認められなかった。ここで注意すべきは、軌道計算法の観点からすると、ハレー彗星の周期算定は過去の出現の記録に拠るところが大きいが、レクセル彗星の場合は、出現は 1 回きりであり、周期算定はもっぱら軌道計算に拠ったということである。但し、そのレクセル彗星の周期算定も、第 1 部第 3 章で見たように、演繹的な軌道計算法によって導かれたものでなく、種々の周期あるいは長半径を仮定して当てはめ、観測データとの誤差の大小を調べるといういわば帰納的な方法によってなされたことに留意する必要がある。

こうして、史上初の超短周期彗星の発見は 19 世紀に持ち越された。1805 年後半に相次いで現れたエンケ彗星とビエラ彗星は、超短周期彗星発見の絶好のチャンスだったが、当時の軌道計算技術ではその周期を正しく認識するにはあと一歩及ばなかった[248)]。

その次にチャンスが巡ってきたのは 1818 年末である。同年 11 月に発見された彗星の軌道計算を行ったエンケはこれが 1805 年第 1 彗星と同一ではないかと気が付き、ガウスの後押しも得て、両彗星の精確な軌道計算に乗り出した。数か月かけてエンケは両彗星が同一であることの立証に成功するが、それは当時の最高レベルの軌道計算技術を駆使した結果であった。

1805 年第 1 彗星と 1818 年彗星が同一であることを立証するだけなら、両者の周期がおおよそ 3 年余と分かっていたのだから、その後、数年から 10 年以内に再度の観測に成功した可能性は十分あった。つまり、高度に精確な軌道計算を行わなくても、1830 年頃までには史上初の超短周期彗星が発見され公認されていた可能性が高い。しかし、1819 年の段階で、純粋に軌道計算のみで、1805 年第 1 彗星と 1818 年彗星の同一性を立証することは、エンケほどの一流の軌道計算技術を有する者しかなしえなかったと言うべきであり、そこにエンケの偉大さがある。

なお、このような高度の軌道計算技術を支えるものの 1 つに最小二乗法がある。最小二乗法は 1805 年のルジャンドルの著書によって初めて公にされたが、

実際に天体の軌道計算で明示的に用いられるのはベッセルの 1810 年書以降である。ベッセル、ガウス、ニコライらによる最小二乗法使用の実例が必ずしも多く見られないのに対し、エンケの軌道計算においてはこの多大な計算量を要する最小二乗法が頻繁に登場する。この点だけを見ても、エンケによる史上初の超短周期彗星の発見には、彼の優れた才能のほかに、人並ならぬ努力が貢献していたことがうかがわれる。

歴史に残るような栄誉ある発見の成就には、しばしば何らかの幸運がつきものである。エンケの場合、まず何と言ってもレクセル彗星が行方不明になって 2 度目の回帰が確認されなかったことが大きい。その他、1818 年から翌年にかけて、エンケと同等あるいはそれ以上に軌道計算に熟達していたベッセルがたまたま 1818 年彗星を観測できずに他の非周期彗星を観測し、その非周期彗星の放物線軌道の計算に従事したことも、1818 年彗星を自ら観測できたエンケにとっては幸運な出来事だった。

本論文の随所で見たように、エンケによる史上初の超短周期彗星の発見は決してエンケ一人で成し遂げたものではない。その背後には師ガウスのほかに、先輩ベッセル、学友クリスチャン・ルードヴィッヒ・ゲルリング(Christian Ludwig Gerling, 1788–1864)、親友ニコライが存在し、さらに有益な助言者オルバース、ゼーベルク天文台での上司だった政治家・天文学者のリンデナウらのほか、ツァッハ、ボーデ、シューマッハら各種天文雑誌の編集者もいて、直接・間接にエンケの研究を支えていた[249)]。そこに感じられるのは、ナポレオンによる欧州支配が崩壊した後、政治・社会・学問・文芸・芸術等のあらゆる領域において急速に先進国たるフランスやイギリスに追いつき、追い越そうとするドイツ民族の意欲と活力である。天文学の分野でも、ツァッハやオルバースらが奮闘していた 18 世紀末から、ガウス、ベッセル、ニコライ、エンケらが縦横に活躍する 1810 年代を迎えて、その層の厚さとレベルの高さにおいてドイツ天文学界は全世界をリードするに至ったと言って過言でない。エンケによる史上初の超短周期彗星発見という天文学上の偉業は、決して単なる偶然の出来事ではなく、このような社会的状況を背景とする極めて蓋然性の高い所産であったと評価して、本論文の結びとしたい。

【注】

序論

1) 短周期彗星と長周期彗星の境界を周期200年とすることについては、例えば、鈴木文二・秋澤宏樹・菅原賢『彗星の科学　知る・撮る・探る』(恒星社厚生閣、2013)、6 頁参照。なお、1995 年から実施されている国際天文連合(International Astronomical Union：IAU) の命名法においては、周期彗星のうち公転周期が 200 年未満のもの及び(公転周期 200 年以上であっても)これまでに回帰(近日点通過)が 2 回以上確認されたもののみを「周期彗星」と呼び、それ以外の彗星(すなわち非周期のもの及び公転周期が 200 年以上でこれまでに 1 回の回帰しか確認されていないもの)を「非周期」とする旨を定めている。彗星の命名法に関する、IAU の総会の 1994 年 8 月 24 日の決議(https://www.minorplanetcenter.net/iau/lists/CometResolution.html [2017 年 11 月 1 日確認])の第 3 項参照。

2) 彗星の放物線軌道を計算で求める方法を最初に示したのはニュートンである。彼は『自然哲学の数学的諸原理』(プリンキピア) の第 3 篇の「命題」の中で彗星に関する命題・問題・補助定理・系・実例等を述べ、彗星の運行・軌道・構造等について詳しく論じた。その中には、例えば、「放物線上を運動する彗星の軌道曲線を、与えられた三つの観測から決定すること」という問題もあり、ニュートンは自分の案出した幾何学的な解法 (作図を含む) を 3 頁ほどにわたって記している。ニュートン(河辺六男訳)『自然哲学の数学的諸原理』(世界の名著 31「ニュートン」所収) (中央公論社、1979 年)、519-522 頁参照。但し、この「三つの観測」は全く任意に取れるわけではなく、二つの時間間隔はほぼ等しい等の制約がある。ニュートンは 1680 年の彗星を例にとって、その軌道を計算し、観測値との差が経度は 2 分以内、緯度は 10 分以内程度に収まっていることを示した。同書 528 頁、表 17 参照。なお，ケプラーの法則その他の天体運動の命題に関するプリンピキアの説明については、三浦伸夫『数学の歴史』(放送大学教育振興会、2013 年)、199-203 頁参照。

3) イギリスの天文学者エドモンド・ハレー(Edmond Halley, 1656-1742)は、1705 年の論文において、1531 年と 1607 年と 1682 年の彗星の軌道が極めて似ていることからこれらは同一の彗星であると断言し、1758 年に再び現れるだろうと予言した。Edmond Halley, "Astronomiae Cometicae Synopsis," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 24 (1704-1705): 1882-1899 (1897). なお、ハレー彗星については、例えば，桜井邦朋・清水幹夫[編]『彗星 ― その本性と起源 ― 』(普及版) (朝倉書店、2010 年)、23-31 頁参照。

4) Heinrich Wilhelm Olbers, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen*, (Weimar: Industrie-Comptoirs, 1797)[以下“ Olbers (1797)“として引用する].

5) Carl Friedrich Gauss, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, (Hamburg: Friedrich Perthes und I.H. Besser,

1809). 本書はガウス全集(以下『全集』又は "*Werke*" と略す)第 7 巻に収録されている。後注 45)参照。

6) 天体の軌道計算の精確さは本論文を通じて重要な論点である。軌道計算は、結局、軌道要素を求めることに帰着する。「軌道計算の精確さ」の概念は必ずしも学問上厳密に定義されていないように思われるが、本論文では、放物線軌道の場合には、当該軌道要素に基づいて算出される天体の地心経度・地心緯度が実際の観測値と極めて近い場合にその軌道計算は精確であると言うことにする。また、楕円軌道の場合には、周期を重視して、当該軌道要素に基づいて算出される天体の周期が実際の観測値と十分近い場合にその軌道計算は精確であると言うことにしたい。なお、この場合、当該軌道要素に基づいて算出される天体の地心経度・地心緯度と実際の観測値との乖離はそれほど大きくないことが前提である。

第 1 部　超短周期彗星発見の前史 —— レクセル彗星の検討を中心として

第 1 章　オイラーの軌道計算法 —— 1769 年彗星の軌道計算について

7) Leonhard Euler, *Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la Comète de l'an 1769 et son tems periodique*, (St. Petersbuourg: De l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, 1770). なお、1769 年彗星の周期については、後注 10) 参照。

8) Leonhard Euler, *Theoria motuum planetarum et cometarum*, (Berlin: Ambrose Haude, 1744).

9) Olbers (1797) : 13 の脚注参照。なお、オイラーの計算方法を引き継ぐ者が現れなかったという点については、*Id.* : 13 参照。

10) 本章でオイラーの軌道計算法を取り上げるのは、その計算法が少なくとも周期彗星の周期の算定については余り精度の高いものでなかったことを検証するためである。本章 2 (10)で見るように、オイラーは 1769 年彗星の周期を 481.7 年と計算したが、その後、アレクサンドル・パングレ(Alexandre Guy Pingré, 1711-1796) は 1232 年、ベッセルは 2090 年という周期を算出しており、オイラーの計算した周期が相当に過小だったことは間違いない。Gary W. Kronk, *Cometography : A Catalog of Comets*, vol. 1 : Ancient-1799, (Cambridge: Cambridge University Press, 1999) : 447 参照。レクセルはオイラーの軌道計算法を概ね受け継いだにもかかわらず、レクセル彗星の周期についてはほぼ正確な値を算定することができた。それはなぜかというのが第 1 部を通じての問題意識である。

11) これは、求める位置を z の 2 次式で近似することを意味する。これ以降の議論はこのような近似解を前提として展開される。

12) オイラーは、まず時刻Tとして 9 月 5 日の観測時刻を選び、時刻 $T-p$ として 9 月 2 日の観測時刻を、時刻 $T+q$ として 9 月 8 日の観測時刻を選んだ場合の計算例を示している(z の単位は 1 時間とする)。すなわち、この場合、

$$p = 73\text{時間}\ 39\text{分}\ 51\text{秒}、q = 72\text{時間}\ 19\text{分}\ 43\text{秒}$$

であり、黄経に関しては、

$$m = 12° 42' 29'', \quad n = 15° 35' 42''$$

となる。これからMとNを求めると、

$$M = 5.31675, \quad N = -4.25397$$

となる。また、黄緯に関しては、同様に計算して、

$$m = 3° 31' 58'', \quad n = 3° 03' 09'', \quad M = 1.04068, \quad N = -1.18258$$

となる。これらを（A）に代入すると、黄経に関しては、

$$75° 36' 25'' + 699''.3375\, z + 1''.06278\, zz$$

が得られ、黄緯に関しては、

$$19° 00' 35'' + 162''.1952\, zz - 0''.14190\, zz$$

が得られる。この近似式の精度を確認するために、オイラーは、9 月 5 日の観測時刻を基準として、9 月 3 日と 9 月 4 日の観測についてそれぞれ計算値と観測値とを比較している。すなわち、9 月 3 日については 9 月 5 日の観測時刻との差 $z = -48.78666$ (時間) をこの 2 つの式に代入すると、黄経は 76° 49' 56''、黄緯は 16° 43' 07'' という計算値が得られる。また、9 月 4 日については 9 月 5 日の観測時刻との差 $z = -24.77527$ (時間) をこの 2 つの式に代入して、黄経は 80° 58' 31''、黄緯は 17° 52' 13'' という計算値が得られる。これを観測値と比較すると、9 月 3 日については黄経、黄緯の誤差がそれぞれ +3' 56''、+3' 21'' となり、9 月 4 日については黄経、黄緯の誤差がそれぞれ +5' 04''、+2' 51'' となる。オイラーはこの誤差の精度について言及していないが、3 分以上の誤差は決して小さいとは言えないであろう。これは彗星の移動が激しいときに時間間隔を 3 日も空けるとこの計算方式の精度が落ちることを示唆している。次注 13)で見るように、オイラーは次の段階で時間間隔を 1 日に狭めている。

13) ここでオイラーは、時刻 T として 9 月 4 日の観測時刻を選び、時刻 $T - p$ として 9 月 3 日の観測時刻を、時刻 $T + q$ として 9 月 5 日の観測時刻を選んだ。この場合、

$$p = 24.011388 \text{ (時間)}, \quad q = 24.775277 \text{ (時間)}$$

であり、黄経に関しては、

$$m = 4° 07' 28'', \quad n = 4° 42' 57''$$

となる。これからMとNを求めると、

$$M = 14.0456, \quad N = -12.6751$$

となる。また、黄緯に関しては、同様に計算して、

$$m = 1° 09' 36'', \quad n = 1° 11' 16'', \quad M = 3.53768, \quad N = -3.56486$$

となる。これらを（A）に代入すると、黄経に関しては、

$$80° 53' 28'' + 651''.2829\, z + 1''.3705\, zz$$

が得られ、黄緯に関しては、

$$17° 49' 22'' + 173''.2648\, z - 0''.02718\, zz$$

が得られる。これらの式の z に± 24 を代入すれば、本文のⅢとⅠの黄経・黄緯が得られる。

14) ここで彗星の位置は、太陽を原点とする座標でなく、観測時刻における地球を基準として、地心黄経、地心黄緯、地球からの距離の 3 要素で表される。地心黄経と地心黄緯は既に得られているので、結局、本章の課題は、彗星の地球からの距離を求めることである。オイラーは、黄道面上に、3 つの時刻における地球の位置（時刻順に A、B、C とする）を取り、また 3 つの時刻における彗星の位置（時刻順に F、G、H とする）の黄道面への投影点（f、g、h とする）を取って、直線 Af、Bg、Ch を引く。太陽の位置を⊙とする。これらの点や直線の交点から形成される種々の 3 角形について観測により分かる辺の長さや角度を次々と求める。線分 Af、Bg、Ch の長さが分かれば、それをそれぞれの地心黄緯の cos で割って求める彗星までの地心距離 AF、BG、CH が得られる。もっとも、Af 等の長さは簡単に計算できないが、オイラーは放物線軌道の場合の軌道速度の公式を用いたり、また彗星は F と H の間で直線運動をして G は FH の中点であるという仮定を置き、さらに角度 B⊙g に現実的な値を仮定するなどして、2 通りの方法で地心距離 AF、BG、CH を算定した。しかし、両者の計算方法の間で 4 パーセント近い相違を生じたので、オイラーはこの方法はあまり適切でないと評価し、次章では別のデータを用いて別の計算方法を検討すると述べている。要するに、本章の意図は、軌道計算方法の提示よりも、むしろ 3 つの時刻として 9 月 3 日・4 日・5 日を選ぶことの適否を検証することにあったように思われる。

15) 「半パラメータ」は、「セミパラメータ」又は単に「パラメータ」ともいい、離心率に 1 を加えて近日点距離を掛けた量に等しい。

16) 第 3 部の冒頭には、第 1 章が始まる前に、前置きとも言うべき無題の節が 1 つ置かれている（第 86 節。109 頁）。そこでは、昇交点（あるいは降交点）の黄経と軌道傾斜角とが分かり、かつ 2 個の観測があれば、その彗星の軌道を完全に決定できることを改めて宣言し、第 3 部ではその軌道決定のより正確な計算方法を検討すると述べている。

17) 1770 年書 75-76 頁参照。

18) 本章 2 を参照すれば分かるように、この方法は 1770 年書の至る所で使われている。

19) 1770 年書第 3 部第 4 章参照。

20) オルバースは、オイラーが 1769 年彗星の軌道を計算した際にはオイラー自身が 1744 年の著書で示したのとは別の計算方法を用いたが、どちらの方法も計算量が多く面倒に見えると評している。Olbers (1797) : 13 参照。

21) 例えば、Euler, *op. cit.* 7) : 168 では、昇交点黄経と軌道傾斜角の 3 通りの組み合わせに関して x と y を使った 1 次式を立て、それを解いて求める値を計算している。すなわち、ここで示された計算法が後に 1770 年書でも使用されたとみるべきであろう。

22) 例えば、パングレは、1784 年の著書「彗星論（第 2 巻）」において、オイラーを含む種々の天文学者の軌道計算例を紹介しているが、それらはいずれも他と異なる独自の計算方法を用いるものが多く、オイラーの場合も例外で

ない。Alexandre Gui Pingré, *Cométographie ou Traité historique et théorique des comètes,* Tome Second, (Paris: De l'Imprimerie Royale, 1784): 420-424 参照。

23) オイラーのこの計算法がレクセルに受け継がれたと考えられることについては、第1部第4章参照。また、それ以外の者に受け継がれなかったと見られることについては、(オイラーの1744年の著書に示された計算法に関してであるが) オルバースが指摘している。Olbers (1797) : 13 参照。

第2章　レクセル彗星の発見

24) この彗星は、後に「レクセル彗星」と呼ばれるようになるが、以下では主として「1770年彗星」と呼ぶ。

25) パングレは1784年の著書でこの彗星の軌道は楕円であるとのレクセルの主張に賛意を示し、自分の計算では周期は5.43年になると述べた。Pingré, *supra* note 22) : 85-90 参照。それ以降、この彗星の軌道を放物線とする見解はほとんど主張されなくなったようである。

第3章　レクセルによる彗星の軌道計算について

26) Anders Johan Lexell, " Solutio Problematis Astronomici, de Inveniendo Loco Heliocentrico Cometae ex Dato Loco eius Geocentrico, si pro Cognitis Habeantur Locus Nodi et Inclinatio Orbitae, in qua Cometa Movetur," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1777, Pars Prior, (1778): 317-331.

27) Anders Johan Lexell, "Tentamen Astronomicum de Temporibus Periodicis Cometarum et Speciatim de Tempore Revolutionis Cometae, A. 1770 Observati," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1777, Pars Prior, (1778): 332-369.

28) Anders Johan Lexell, "Coniectura de Locis Coeli, in quibus Cometa Anni 1770, in Proximo suo ad Perihelium Reditu, e Teliure nostra Conspici debet," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1777, Pars Posterior, (1780): 328-342.

29) Anders Johan Lexell, "Ulteriores Disquisitiones de Tempore Periodico Cometae, Anno 1770 Observati," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1778, Pars Prior, (1780): 317-352.

30) Anders Johan Lexell, " Réflexions sur le temps périodique des comètes en général et principalement sur celui de la comète observée en 1770," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1778, Pars Posterior, (1781): 12-34.

31) Joseph-Jérôme Lefrançois de Lalande, "Lettre sur le retour de la Comète de 1770, adressée à Messieurs les Auteurs du Journal des Sçavans," *Le Journal des Sçavans*, Janvier 1778 (1778): 34-36.

32) Charles Messier, "Mémoire contenant les observations de la XI.e comète observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine, et du Collége de Louis-le-Grand; depuis le 14 juin, jusq'au 3 Octobre matin 1770," *Histoire de l'Aacadémie Royale des Sciences pour 1776* (1779): 597 (637-651).

33) Anders Johan Lexell, *Réflexions sur le temps périodique des comètes en général, et principalement sur celui de la comète observée en 1770*, (St. Petersbourg: de l'Imprimerie de l'Académie imperiale des sciences, 1778).

34) 当時の表記法では、対数の値が負のときは、その値に 10 を加えた数で表記した。したがって、「9.8296000」のように対数の整数部分が 9 のときは、通常、そこから 10 を引いた負の数すなわち「−0.1704000」が実際の対数の値である。なお、距離の単位は AU である。

35) 前注 31) の文献参照。以下の【論稿⑥の概略】はラランドの文章の要旨をまとめたものである。なお、以下、書簡や記事の内容の概要を紹介する場合は《　》で囲むことにする。

36) ラランドは、ここでルクセルが用いた楕円軌道の計算方法はオイラーが 1769 年彗星の計算で示した方法と類似していると述べている。*Id.* : 34.

37) 1770 年彗星は、6 月 30 日から 8 月 1 日の間、太陽方向に接近したため観測できなかった。そこで、6 月 29 日までが「前期」、8 月 2 日以降が「後期」と呼ばれる。

38) この軌道要素を仮定した場合、周期は結局、5.6 年になる。

39) 論稿⑧の中には、1779 年 8 月に起きると予想される 1770 年彗星と木星の「合」に関して動詞 être の未来形の sera を用いて記述している個所がある。前注 33) の 32 頁参照。このことを考慮すると、少なくとも論稿⑧の執筆時期は —— そして恐らく刊行時期も —— 1779 年 8 月以前だったのではないかと推測される。

40) 「離心率が近日点距離の約 4 千倍になる」とは、楕円軌道の中心から太陽までの距離が太陽から近日点距離までの距離の約 4 千倍になるという意味と解される。

第 2 部　天体の軌道計算の発展に関する考察 —— 1797 年～1818 年を中心に

第 1 章　概説

41) フロジェルグ彗星については、後注 134)参照。

42) 以下の諸彗星については、第 2 部第 11 章の記述参照。

第 2 章　オルバースの放物線軌道計算法

43) 書名は『数個の観測から彗星の軌道を計算するための最も容易にして快適な方法に関する論文』である。Heinrich Wilhelm Olbers, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen* (Weimar: Industrie-Comptoirs, 1797). 前注 3) で記したように、以下では“Olbers (1797)“と略記する。

44) この図 3 の中の大円 TKCG を考えたのがオルバースの優れた着想であった。この大円は、結局、「太陽・地球・観測時の天体を含む平面」と太陽を中心とする「単位球」の交わりである。こうして、軌道計算を球面 3 角形の計算に帰着させたのがオルバースの功績と言える。

第 3 章　ガウスの軌道計算法(その 1)

45) 正式名称は『円錐曲線で太陽を回る天体の運動の理論』である。Carl

Friedrich Gauss, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, (Hamburg: Friedrich Perthes und I.H. Besser, 1809). 本書はラテン語で書かれ、『全集』第 7 巻に収録されている。Carl Friedrich Gauss, *Werke* , 7 (Göttingen: Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner), 1906), 1-288 参照。本書の翻訳は、1857 年に Charles Henry Davis による英訳(*Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections*, (Boston: Little, Brown and Company, 1857))が、1864 年に Edmond Paulin Dubois による仏訳(*Théorie du mouvement des corps célestes parcourant des sections coniques autour du soleil*, (Paris : A. Bertrand, 1864))が、1865 年に Carl Haase による独訳(*Theorie der Bewegung der Himmelskörper welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen*, (Hannover: Carl Meyer, 1865))がそれぞれ刊行された。邦訳はまだないが、第 2 部第 3 章のみ、ガウス(飛田武幸・石川耕春訳)『誤差論』(紀伊國屋書店、1981 年)、92-113 頁に訳出されている。なお，ガウスの生涯全般については、Guy Waldo Dunnington, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, (New York: Hafner Publishing, 1955)(Reprinted by The Mathematical Association of America, 2004) 及びその訳書である、ダニングトン著（銀林浩・小島穀男・田中勇訳)、『ガウスの生涯』（東京図書、1976）が詳しい。

46) ガウスの数学日記には,天文学の研究に関する記載が幾つかあるが、1801 年 9 月中旬の第 119 項目では「天体の軌道要素を探求するための極めて簡明で迅速な新方法」と記され、また、同年 10 月の第 121 項目では「天文理論における有用な新公式を多数発見した」旨が記されている。 *Werke*, 10-1 (1917) : 561-563 参照。

47) ガウスが算出したこれらの予想位置は、*MC*, 4 (1801 Dec) : 647 に掲載されている。

48) *MC,* 5 (1802 Feb.) : 180-181 ; *Werke*, 6 : 204-205 参照。オルバースはツァッハ宛の書簡で「(ガウスの予測がなければ) 私はそれほど東の方を探したりしなかったであろう」と述べている。また、ガウス自身が『ゲッティンゲン学術公報(Göttingische gelehrte Anzeigen)』(以下”GGA”と略す)に寄稿した『天体運動論』の紹介記事によると、当時の多くの天文学者が行ったような円軌道の仮定に基づく計算では、1801 年末において既に約 11° の誤差が生じるという（*GGA,* 96 (1809 Jun. 17) : 950; *Werke*, 6 : 56)。

49) *Werke*, 7 : 7-8 参照。

50) この 41 日間にケレスが描いた角度を太陽から見た場合（=日心角度）には、約 9° となる。

51) 例えば、*MC,* 5 (1802 May) : 497-498 において、編集者ツァッハは、この天体が通常とかなり異なる彗星かそれともケレスのような惑星かはまだ分からないとしていた。

52) *MC,* 5 (1802 Jun.) : 593.

53) *Id.* : 594 の表参照。

54) *Id.* : 596.
55) *Id.* : 596 の表参照。
56) *MC,* 6 (1802 Jul.) : 83.
57) *Id.* : 84.
58) *Id.* : 394. この第 4 番目の軌道要素は次の通りである。
元期(1802 年 3 月 31 日正午、ゼーベルク)・・162°35'06".8
平均日々赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・769".726
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・ 0.4424992
遠日点黄経(恒星位置による) ・・・・・・・・ 301°38'41"
昇交点黄経(恒星位置による) ・・・・・・・・ 172°26'31"
離心率 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・0.243888
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・・・・・34°36'59"
59) *MC,* 6 (1802 Dec.) : 581. この第 5 番目の軌道要素は次の通りである。
元期(1802 年 3 月 31 日正午、ゼーベルク)・・162°46'58".2
遠日点黄経 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 301°28'24".0
昇交点黄経 ・・・・・・・・・・・・・・・・ 172°27'03".0
日々赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・・・769".583
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・ 0.4425529
離心率 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・0.244976
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・・・・・34°37'40"
60) *MC,* 7 (1803 May) : 374. この第 6 番目の軌道要素は次の通りである。
元期(1802 年、ゼーベルク)・・・・・・・・・143°28'17".2
元期(1803 年、ゼーベルク)・・・・・・・・・221°28'54".0
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・ 0.4426160
日々赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・・・769".4161
離心率 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・0.245619
遠日点黄経(1803 年の恒星位置による) ・・・ 301°24'13"
昇交点黄経(1803 年の恒星位置による) ・・・ 172°28'08"
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・・・・・34°38'19".8
61) *MC,* 9 (1804 März) : 250. この第 7 番目の軌道要素は次の通りである。
元期(1803 年、ゼーベルク)・・・・・・・・・221°29'32".0
日々赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・・・770.0446"
年間赤道運動 ・・・・・・・・・・・・・・・78°04'26".3
遠日点黄経 (1803 年)・・・・・・・・・・・ 301°17'34".4
離心率 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・0.2457396
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・ 0.4423790
昇交点黄経(1803 年) ・・・・・・・・・・・ 172°28'13".7
軌道傾斜角・・・・・・・・・・・・・・・・・34°38'01".1
62) ガウスは『天体運動論』の序言の中で次のように述べている。*Werke*, 7 : 8-9.

　ケレスの再発見後、直ちに、何人もの天文学者たちは、私がこの計算に用いた方法を公表して権利主張をすることを望んだ。しかし、この友好的な申し出を実現させるには、当時多くの障害があった。他にも諸仕事があったし、この問題をもっと十分に検討したいという希望もあった。特に、引き続きこの研究を進めれば解法の種々の部分の一般性、単純さ、エレガンスがより高まるだろうという期待があった。このような希望はほとんど誤っていなかったので、私はこの遅れを後悔する理由はないと思っている。というのは、当初用いた方法は何度も多くの修正を受けたので、かつてケレスの軌道を計算したときのやり方と本書で採用された仕組みとの間には、類似の跡がほとんど残っていない。

もっとも、ガウスは、パラスの軌道計算に成功した 1802 年夏頃には、自分の軌道計算法の概要を公表することを検討していたことに注意すべきである。後出の本文(3)の 1802 年論稿に関する記述参照。

63) *Werke*, 11-1 : 221-252.
64) *Werke*, 11-1 : 221-231.
65) *Werke*, 11-1 : 232-240.
66) *Werke*, 11-1 : 241-249.
67) *Werke*, 11-1 : 249-252.
68) 1 番目の項目と 2 番目の項目の草稿については、『全集』の編集者が 1801 年 11 月という日付を付している。 *Werke*, 11-1 : 221, 232. また、3 番目の項目の草稿については、『全集』に日付の記載がないものの、その内容である第 3 次の軌道要素は『月報』1801 年 12 月号に掲載されているのであるから、やはり 1801 年 11 月頃に書かれたとみてよいであろう。
69) このことは、これらの遺稿及び 1802 年論稿を精査すれば当然に導かれる結論と思われるが、これまでこの点を明確に述べた文献は余り多くない。
70) ガウスとオルバースの書簡集は、オルバースの生涯と業績に関する書物 *Wilhelm Olbers : sein Leben und seine Werke* の第 2 巻 *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss* (Berlin, Verlag von Julius Springer)として構成されている。第 2 巻の第 1 分冊は 1900 年に、第 2 分冊は 1909 年に刊行された。
71) *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss : sein Leben und seine Werke* , Band 2, 1 : 65.
72) *Id.* : 65.
73) *Id.* : 66.
74) *Id.* : 67.
75) *Id.* : 67.
76) *Id.* : 72-73.
77) *Id.* : 74-79.
78) *Id.* : 82-87.
79) *Id.* : 91-96

80) Carl Friedrich Gauss, “Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden,“ *MC,* 20 (1809 Sep.) : 197-224 ; *Werke,* 6 : 148-165. なお、1802 年論稿を『月報』に掲載するにいたった事情については、冒頭の頁の脚注に次のような説明がある。 *Werke,* 6 : 148.

> 暫く以前にガウス教授と個人的な面識を得る幸運に恵まれたとき、私は、彼の書類の中に、以下に紹介する数年前に執筆されまだ知られていない論文を見かけた。それは惑星の軌道を決定するためのガウス教授の初期の方法を扱っていた。この「概要」にざっと目を通した私は、そこで著者が展開した惑星と地球の間の 2 個の距離の第 1 次近似決定の方法が、今や著者がその大著において公開した方法とは異なっていることをすぐに確信した。そこで私は、本誌の前号で読者にその概要をお知らせしたガウス教授の完璧な解法に関し、氏がそこに到達し得た諸方法を知ることはすべての専門家の関心事であると考えて、この論文を公表することの許可を氏に求めた。当初、私は、この論文に注釈を付けて、著者の初期の方法と後期の方法とを比較する一助としたいと考えていた。しかし、実際に解説を付するとなると、相当長大になりまた氏の著書への参照なしには不明瞭なままで終わりそうなので、この論文（氏の著書を所持している専門家にとっては明確な内容だが）の全体を、6 年前に書かれた通りの状態で、何らの付記も加えずに、この雑誌の天文学読者に提供する方がより適切と思われた。
>
> フォン・リンデナウ

81) *Werke,* 6 : 148 参照。①については第 3 節から第 7 節までが、②については第 8 節と最終節の第 9 節がそれぞれあてられている。なお、ここでガウスが想定する軌道修正法は、オルバースがその著書において説明した軌道修正法とはかなり性質が異なることに注意する必要がある。オルバースの放物線軌道の計算法においては、最初に得られた近似的な軌道要素を修正する過程が重要で、それによって相当に精確な軌道が得られる。しかし、ガウスの軌道計算法においては、最初に得られる近似的な軌道要素が既に相当程度精確なので、その後の軌道改良は一層の精確さを上乗せするという副次的な意味を持つにとどまると言ってよい。実際、ガウスは、①の方法で得られた値は、通常、観測値と数秒程度しか違わないと述べている。 *Werke,* 6 : 163 参照。

82) 第 1 の要点については第 3 節から第 6 節までで検討され、第 2 の要点については第 7 節で検討されている。

83) ここでガウスは次のような式を記している。 *Werke,* 6 : 159 参照。なお、この式には書き間違いがあり、右辺になお R'^3 を掛ける必要がある旨をオルバースが指摘している。*Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss : sein Leben und seine Werke* , Band 2, 1 : 75 参照。

$$\left\{1-\left(\frac{R'}{r'}\right)^3\right\}\cdot\frac{R'}{\delta'}=\frac{2}{A^3(M'-M)(M''-M')}$$
$$\cdot\frac{\tan\beta'\sin(\lambda''-\lambda)-\tan\beta\sin(\lambda''-\lambda')-\tan\beta''\sin(\lambda'-\lambda)}{\tan\beta\sin(L'-\lambda'')-\tan\beta''\sin(L'-\lambda)}$$

ここで、R'は2番目の観測時における地球と太陽の距離、r'は2番目の観測時における天体と太陽の距離、Aは地球の楕円軌道の長半径、Mは1番目の観測時における地球の平均黄経、M'は2番目の観測時における地球の平均黄経、M''は3番目の観測時における地球の平均黄経、βは1番目の観測時において地球と天体を結ぶ直線が黄道面となす角、β'は2番目の観測時において地球と天体を結ぶ直線が黄道面となす角、β''は3番目の観測時において地球と天体を結ぶ直線が黄道面となす角、δ'は2番目の観測時において地球と天体の距離を黄道面に射影した距離、λは1番目の観測時における地球と天体の距離の黄道面への射影が太陽の中心で黄道面と直交する任意の固定平面𝔜となす角、λ'は2番目の観測時における地球と天体の距離の黄道面への射影が平面𝔜となす角、λ''は3番目の観測時における地球と天体の距離の黄道面への射影が平面𝔜となす角、L' は2番目の観測時における太陽の黄経に$180°$ を加えたものである。この右辺は既知なので、これと次式を合わせると、容易に r' とδ'が求められる。

$$\frac{\frac{R'}{\delta'}}{\frac{R'}{r'}}=\sqrt{1+(\tan\beta')^2+\frac{R'R'}{\delta'\delta'}+2\,\frac{R'}{\delta'}\,\cos(\lambda'-L')}$$

84) *Werke,* 6：159. また、前述の1802年8月6日付のオルバース宛の書簡の中で、ガウスは、この式(第6節の式7)を指す。なお、この式の右辺の最後の項の分子のRはR'の誤りと解される。)について、自分の方法の中で最も本質的な個所であり、1年近く前に全く別のやり方でこの式にたどり着いたと述べている。*Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss : sein Leben und seine Werke* , Band 2, 1：65参照。実際、前述の遺稿Iの[2]では最初にこの式が挙げられている。*Werke,* 11-1：222参照。

85) 半パラメータは、aを楕円軌道の長半径、eを離心率として、$a(1-e^2)$で表すことができる。

86) この第1の方法について、ガウスは次のように述べている。*Werke,* 6：160参照。なお、ここでπは天体の軌道面における遠日点の経度、vは1番目の観測時における天体の軌道面上の経度、v''は3番目の観測時における天体の軌道面上の経度、eは離心率、kは半パラメータ、aは天体の楕円軌道の長半径を表す。

第1の方法

π を既知と仮定した場合

$$\frac{r''+r}{r''-r}\tan\frac{1}{2}(v''-v) = \tan\zeta$$

とおくと、次のようになる。

$$e = \frac{\cos\zeta}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)\ \cos\left[\pi-\frac{1}{2}(v+v'')-\zeta\right]}$$

ここで最も推奨されるのは、k を次の 2 通りのやり方で計算することである。

$$k = r[1-e\cos(v-\pi)] = r''[1-e\cos(v''-\pi)]$$

なおこの式は検算にも役立つ。$e=\sin\varphi$ とおくと、$a=\frac{k}{(\cos\varphi)^2}$ である。すると、通常の方法に従って、あるいはより快適に間接的方法に従って、真近点角から、離心近点角と平均近点角と経度を計算できる。これら及びa より得る平均運動から、任意の元期に対して平均経度を 2 通りの仕方で決定できる。その両者が一致すれば、π の正しい値を得たことになる。一致しないときは、π の値を少し変えて計算を繰り返し、補間法によって真の値を見出す。その際、推奨されるのは、その他の軌道要素を補間法によって求めるのではなく、π の修正された値から新たに計算を行いその元期に対する 2 つの値が完全に一致するまで計算を止めないことである。

87) 第 2 の方法に関する以上の記述については、*Werke*, 6：161 参照。
88) 第 3 の方法に関する記述については、*Werke*, 6：161-162 参照。
89) *Werke*, 6：161.
90) 軌道改良に関するこの方法については、*Werke*, 6：163 参照。
91) このように新たに得られた観測データを用いて軌道改良を行う場合の諸方法 Ⅰ, Ⅱ^{a}, Ⅱ^{b}については、*Werke*, 6：164 参照。
92) ガウスはこの方法Ⅱ^{b}について次のように述べている。*Werke*, 6：164-165.

上記のⅡ^{b}においても、周知の公式を用いて、*3 個の日心位置*から、時間を用いることなく楕円を求めることは可能である。すなわち、楕円の形状から 2 個の経過時間を計算して真実の経過時間と比較し、そして上と全く同様に、補間法を用いて、修正された軌道傾斜角と昇交点黄経を求めるのである。しかし、私は、経験上、この手順を放棄せざるを得なかった。このやり方の場合、はるかにより多くの労力をかけて計算を繰り返した後に、やっと観測の精確な表現に到達できる。ここでその原因について詳論すると長くなり過ぎる。そこで次のことだけ注意しておこう。すなわち、このやり方においては、第 5 節と第 6 節で述べた工夫によって回避していた 2 階微分が再び生じるが、このデリケートな 2 階微分は、特に離心率が大きくない場合には、軌道傾斜角と昇交点黄経の変

化が大きくなくても、巨大に変動する可能性がある。この場合、容易に起こり得ることだが、昇交点黄経あるいは軌道傾斜角が 2～3 分変化すると、従来とはほとんど全く似ていない楕円が現れる可能性があり、それ故もちろんもはや補間法を信用することはできない。我々の方法の場合、常に 2 個の観測のみを基礎に置くので、このようなことは生じない。

93) *Werke*, 6：165.

94) ここで「その軌道要素が微小な所まで決定されている場合には」や「任意の個数の観測を基礎に置くことができる微分変化」という表現を考慮すると、この文章でガウスが意味している計算法は最小二乗法であると考えるべきだと思われる。実際、「任意の個数の観測」をすべて考慮に入れて軌道要素を決定するという計算方法は最小二乗法以外にほとんど想定することができない。また、微分変化の公式を用いて計算値と観測値の誤差を表す手法は後述する 1811 年論文の重要なポイントである。「最小二乗法」という言葉はルジャンドルが 1805 年の著書で使い始めたのであるから、この 1802 年論稿でガウスが「最小二乗法」の語を用いていないのは不思議でない。ガウスがこの「微分変化」による軌道計算を実際に行ったと考えられるのが、後述の 1811 年論文である。その論文においてガウスは「多数の観測を基礎に置いた微分変化」を最小二乗法の名の下で用い、パラスの軌道改良の計算を行っている(第 2 部第 8 章参照)。もし以上の見方が正しいとすれば、ガウスのこの文章は、彼がルジャンドルの 1805 年の著書以前に最小二乗法を認識していたことの証左の 1 つと位置付けることができるであろう。同様の指摘をするものとして、Assyr Abdulle and Gerhard Wanner, “200 years of least squares method,” *Elemente der Mathematik*, 57 (2002): 45-60 (50) がある。その他、この文章が最小二乗法を想定していると考えられる証左については、第 4 部第 2 章 1(1)参照。なお、ガウスの軌道計算法の中には「微分変化を用いない最小二乗法」も存在した可能性が高い。この点については、後注 240) 参照。

95) 以下の記述については、*MC,* 9 (1804 Mai)：432-435; *Werke*, 6：247-248 参照。

96) *MC,* 9 (1804 Mai)：433; *Werke*, 6：247.

97) ガウスは 1804 年 8 月 3 日付のオルバース宛書簡で、この彗星の軌道計算について「この彗星の軌道をあなたの方法に従って決定することを暫定的に試みました」と述べている。なお、そこで示された軌道要素は光行差や視差を考慮しない暫定的なものであり、『月報』に登載されたものとは多少異なっている。*Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss：sein Leben und seine Werke,* Band 2, 1：186 参照。

第 4 章　1805 年第 1 彗星（エンケ彗星）について ―― ベッセルの登場

98) この頃までのベッセルの生い立ちについては、彼自身の手による回想録がある。*Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel*, herausgegeben von Adolph Erman, 1, (Leipzig: Avenarius & Mendelssohn, 1852)：IX-

XXX.

99) *MC*, 12 (1805 Nov.) : 499-502.

100) この彗星は、本論文の第 3 部では「1818 年彗星」の名の下で考察の中心対象となる。

101) *MC*, 13 (1806 Jan.) : 79-82.　ベッセルの算出した軌道要素は、近日点通過＝1805 年 11 月 18.13782 日(パリ時間)、昇交点黄経＝344°37'18".8、軌道傾斜角＝15°36'35".8、近日点経度＝147°51'28".0、近日点距離の対数＝9.5782015 (＝0.3786182 AU)、順行、であった。なお、この軌道要素で計算した場合の観測値との誤差は次のようになるとされた。

パリ平均時(1770 年)	黄経(観測値)	**黄経の誤差**	黄緯(観測値)	**黄緯の誤差**
10 月 22.68647 日	163° 20' 52".2	－ 0' 13".1	23° 01' 42".1	＋ 2' 11".5
27.67547 日	176° 55' 24".2	＋ 2' 49".6	18° 27' 23".6	－ 0' 16".0
29.66532 日	181° 33' 31".9	＋ 2' 08".2	16° 34' 59".2	－ 0' 10".8
31.67044 日	185° 51' 32".6	－ 0' 21".8	14° 44' 10".9	－ 0' 08".5
31.67382 日	185° 51' 31".9	＋ 0' 21".9	14° 43' 43".4	＋ 0' 08".7
11 月 12.72271 日	206° 35' 44".4	＋ 1' 20".1	5° 02' 46".4	＋ 0' 42".3
13.73288 日	208° 14' 20".3	－ 1' 00".7	4° 22' 34".8	－ 0' 46".5

これを見ると、7 個の観測のうち、黄経の誤差が 2 分を超えるものが 2 個、1 分を超えるものが 2 個あるから、精度はかなり悪いと評すべきであろう。

102) *MC*, 13 (1806 Jan.) : 82-83 ; *Werke*, 6 : 265-266. ガウスの算出した軌道要素は、近日点通過＝1805 年 11 月 17.746 日(ゼーベルク時間)、昇交点黄経＝340°11'、軌道傾斜角＝17°34'、近日点経度＝157°17'、近日点距離の対数＝9.53969(＝0.34649 AU)、順行、であった。

103) この彗星が観測されたのは、1805 年 10 月 19 日から同年 11 月 19 日までの 31 日間である。ベッセルは、この間の計 31 個の観測を対象とし、光線の大気屈折等を考慮した上で得られた軌道要素と実際の観測値との誤差を報告しているが、そこでも数分程度の誤差が多数存在する。*MC*, 14 (1806 Juli) : 69 参照。結局、この時点では、誰も 1805 年第 1 彗星の軌道を精確に把握できなかったと言うべきであろう。そもそも当時は、周期が 10 年以下という超短周期彗星の存在を想定することは、レクセル彗星の前例がないわけではないもの、決して容易ではなかったであろう。したがって、1 か月程度という短期間の観測データで楕円軌道を算出できなかったのも無理はないと考えられる。なお、第 3 部第 2 章で見るように、1819 年にエンケはそれまでに得られた高度の計算技術を駆使して、この 1805 年第 1 彗星の軌道を計算し直した。その結果得られた軌道要素は信頼度が相当に高いと考えられるが、その値は次の通りである（第 3 部第 2 章 4 参照)。

エンケが 1819 年に計算した 1805 年第 1 彗星の軌道要素

近日点通過時刻	1805 年 11 月 21.50637 日	(パリ平均時)
近日点経度（ω)	156°47'19"	(平均分点(1806 年))
昇交点黄経（Ω)	334°20'05"	(　〃　)
軌道傾斜角（i)	13°33'30"	
近日点距離の対数(lg q)	9.5320168	

(参考)

離心率(e)	0.84617529

この離心率以外の軌道要素を、ベッセルやガウスの算定した放物線軌道を前提とする上述の軌道要素と比較すると、当然のことながら、かなりの相違がある。

第 5 章　1805 年第 2 彗星（ビエラ彗星）について

104）ビエラ彗星は、今日の有力な計算では、近日点通過時刻＝1806 年 1 月 2.4028 日、昇交点黄経＝254°.0782 (2000.0 分点)、近日点引数＝218°.0800、軌道傾斜角＝13°.5913、公転周期＝6.74328 年、離心率＝0.745847、長半径＝3.569283 AU、近日点距離＝0.907144 AU だったとされている。Gary W. Kronk, *Cometography : A Catalog of Comets*, vol. 2: 1800-1899[以下"Kronk, vol. 2"と略する], (Cambridge: Cambridge University Press, 2003)：8 参照。ビエラ彗星は 1845 年の太陽接近時に 2 つに分裂し、1852 年を最後にそれ以降は観測されていない。

105) *MC,* 13 (1806 Jan.)：83-91, *Werke,* 6：266.

106）この書簡は 1806 年に刊行された 1809 年用の『ベルリン天文年鑑』(*Berliner Astronomisches Jahrbuch*)[以下"*BAJ*"と略す] に掲載された。*BAJ* für 1809, (1806)：137-140；*Werke,* 6：267-269.

107) *MC,* 14 (1806 Jul.)：75-86, *Werke,* 6：270-275.

108）ここでガウスが示した周期 4.74 年は実際の周期(＝6.6454 年)とかなり違っている。1772 年と 1805 年の彗星を同一とした場合、ガウスによれば 33 年数か月の間に 7 回周回したことになるが、実際には 5 回だった。ガウスの示した軌道要素がこれほど実際と違っていたのは珍しい。このようにガウスが誤った算定をした原因は、1 つには多数の精確な観測データが入手できなかったことにあるが、より大きな原因は、太陽周辺の観測のみで周期 4.7 年の楕円軌道か周期 6.6 年の楕円軌道かを判別するのが非常に難しかったことである。ガウスはその困難性をよく承知していた模様で、その後も楕円軌道の周期計算には関心を寄せ続けたように見受けられる。例えば、1819 年にエンケがほぼ完璧な軌道計算によって 1805 年第 1 彗星と 1818 年彗星の同一性を立証したことをガウス自身が承認し称賛しつつも、もし立証された 4 回の周回でなく 3 回の周回を仮定すると計算と観測の一致度はどの程度になるか知りたいものだという趣旨のコメントを付している。*Werke,* 6：421 参照。これは、4 回の周回を疑っているのではなく、純粋に数理的な問題として周期の仮定が 2～3 年変わったときに観測との誤差がどの程度変動するのかを知りたか

ったのではないかと推測される。また、1826 年にビーラが 1805 年第 2 彗星と 1826 年彗星の同一性を主張・立証した際に、ガウスは、その主張の正しさを認めつつも、自分が 1806 年に行った 1805 年第 2 彗星の軌道計算の結果を紹介しつつ、もし木星の引力による影響がなければこの彗星の周期が 3 年余という可能性も十分あると述べている。*Werke,* 6：453 参照。しかし、ガウスはエンケ彗星についてもビエラ彗星についてもその周期に関してそれ以上の考察を行っておらず、結局、1806 年に――多分に暫定的ではあるものの――ビエラ彗星の周期を 4.74 年と誤って算定したことについて彼は明確な評価を下していないように思われる。

109) ガウスが計算した放物線軌道の場合の誤差は次の通りである。*Werke,* 6：271.

1805 年	時刻(観測地)	赤経の誤差	赤緯の誤差	観測者
11 月 15 日	10 時 28 分 13 秒	－ 2' 30"	＋ 0' 26"	テュリ
16 日	7 時 17 分 54 秒	－ 1' 58"	＋ 0' 46"	テュリ
19 日	7 時 11 分 17 秒	－ 0' 04"	＋ 1' 07"	テュリ
20 日	7 時 03 分 15 秒	－ 0' 23"	－ 0' 32"	テュリ
21 日	9 時 36 分 01 秒	＋ 1' 13"	－ 0' 20"	テュリ
23 日	7 時 23 分 15 秒	＋ 1' 00"	＋ 0' 40"	テュリ
29 日	6 時 39 分 44 秒	＋ 1' 32"	＋ 0' 01"	テュリ
12 月 2 日	5 時 34 分 09 秒	＋ 1' 35"	－ 0' 52"	オルバース
2 日	9 時 39 分 00 秒	＋ 1' 47"	－ 0' 03"	テュリ
3 日	5 時 48 分 39 秒	＋ 0' 45"	－ 2' 05"	オルバース
3 日	6 時 30 分 37 秒	＋ 1' 10"	－ 0' 26"	テュリ
4 日	6 時 31 分 05 秒	＋ 2' 12"	－ 1' 12"	テュリ
6 日	7 時 16 分 16 秒	＋ 0' 22"	＋ 0' 48"	テュリ
7 日	7 時 35 分 21 秒	0' 00"	＋ 0' 42"	テュリ
8 日	5 時 27 分 22 秒	－ 1' 10"	＋ 2' 44"	オルバース
8 日	6 時 46 分 23 秒	－ 0' 42"	＋ 2' 18"	オルバース
8 日	6 時 55 分 17 秒	＋ 0' 04"	－ 0' 47"	ガウス
8 日	―	－ 0' 33"	－ 0' 15"	マスケリン
8 日	6 時 59 分 39 秒	＋ 0' 09"	－ 0' 33"	テュリ
8 日	7 時 58 分 03 秒	－ 0' 23"	―	ガウス

9 日	6 時 04 分 09 秒	ー 0' 16"	―	テュリ

なお、この計算は光行差、章動、視差を考慮に入れている。 *Werke,* 6 : 271-272.

110) ガウスが計算した楕円軌道の場合の誤差は次の通りである。 *Werke,* 6 : 272.

1805 年	時刻(観測地)	赤経の誤差	赤緯の誤差	観測者
11 月 15 日	10 時 28 分 13 秒	+ 15"	ー 19"	テュリ
16 日	7 時 17 分 54 秒	+ 15"	ー 1"	テュリ
19 日	7 時 11 分 17 秒	+ 7"	+ 45"	テュリ
20 日	7 時 03 分 15 秒	ー 47"	ー 49"	テュリ
21 日	9 時 36 分 01 秒	+ 7"	ー 38"	テュリ
23 日	7 時 23 分 15 秒	ー 42"	+ 22"	テュリ
29 日	6 時 39 分 44 秒	ー 33"	ー 8"	テュリ
12 月 2 日	5 時 34 分 09 秒	+ 20"	ー 42"	オルバース
2 日	9 時 39 分 00 秒	+ 6"	+ 13"	テュリ
3 日	5 時 48 分 39 秒	ー 15"	ー1' 46"	オルバース
3 日	6 時 30 分 37 秒	+ 8"	0' 00"	テュリ
4 日	6 時 31 分 05 秒	+ 1' 31"	ー 37"	テュリ
6 日	7 時 16 分 16 秒	+ 13"	+ 14"	テュリ
7 日	7 時 35 分 21 秒	+ 7"	+ 29"	テュリ
8 日	5 時 27 分 22 秒	ー 30"	+ 3' 13"	オルバース
8 日	6 時 46 分 23 秒	ー 3"	+ 2' 57"	オルバース
8 日	6 時 55 分 17 秒	+ 30"	ー 8"	ガウス
8 日	―	ー 1"	+ 22"	マスケリン
8 日	6 時 59 分 39 秒	+ 33"	+ 1"	テュリ
8 日	7 時 58 分 03 秒	ー 11"	―	ガウス
9 日	6 時 04 分 09 秒	ー 4"	―	テュリ

この楕円軌道の場合の誤差を前記の放物線軌道の場合の誤差と比較すると、特に赤経について相当に改善されていることが一目瞭然である。ガウスはこの

ようにほとんどの赤経・赤緯について誤差が 1 分以内に収まる楕円軌道を求めながら、33 年の間に 5 回でなく 7 回周回したという誤った結論を出したことが注目される。このことは、太陽周辺でしか観測できない周期彗星についてその全体の周期を算定することの難しさを物語っていると言えよう。

111) *MC,* 14 (1806 Aug.)：181-186; *Werke,* 6：275-277.

第 6 章　ガウスの軌道計算法（その２）

112) ガウスは、1802 年夏に自己の軌道計算方法の概要を示した 1802 年論稿を執筆しそれを公表することを検討したものの、結局、それは 1809 年まで刊行されなかった。第 2 部第 3 章 6(2), (3)の記述参照。

113) *Werke,* 7：8-9.

114) 1802 年論稿に示された計算方法については、第 2 部第 3 章 6(3)の記述参照。また、ガウスの数学日記を見ると、1806 年 1 月から 1807 年 1 月 21 日まで、天体の軌道計算に関して進展や取組みを示す記述がある（第 125，126、127、129 項目）。これらを合わせ検討すると、ガウス自身が述べているように、1801 年のケレスの軌道計算の方法は『天体運動論』に書かれたものとは相当異なっていたと考えてよい。実際、1802 年論稿では、まず天体と地球の間の距離を求めることを狙いとし、そのための公式を「方法全体の中で最も重要な部分」と呼んでいる。しかし、『天体運動論』では、天体と太陽あるいは地球との間の距離は、多数の軌道要素や補助量を計算する過程で導出される 1 つの量に過ぎない（例えば、『天体運動論』第 2 部第 1 章第 143 節参照）。この点だけを見ても、1802 年論稿と『天体運動論』の構成が全く異なることは明らかである。

115) Adrien-Marie Legendre, *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes,* (Paris: Firmin Didot, 1805).

116) *Werke,* 6：27.

117) 例えば、中村士『宇宙観の歴史と科学』（放送大学教育振興会、2003）、176 頁の脚注参照。

118) ここでガウスが天体の軌道計算に際して最小二乗法を使用した実例について触れておこう。第 2 部第 8 章で紹介するガウスの 1811 年論文は、数年間にわたるパラスの衝の時の観測記録をもとに、最小二乗法を使用してその軌道要素の精密化を図る方法を示した論文である。なお、この論文では摂動による軌道要素の変化は考慮外とされている。この 1811 年論文を除くと、ガウスが小惑星や彗星の軌道計算を行う際に最小二乗法を使用したことを明示する例は余り見当たらないと言ってよい(但しここで想定しているのは「微分変化を用いる最小二乗法」である。他のタイプの最小二乗法については別に考える必要がある。後注 240）参照)。第 2 部第 3 章 6 で述べたように、1802 年論稿の最後に書かれた文章は、軌道改良について最小二乗法を使用するという意味だと解される。1802 年論稿や『天体運動論』を見る限り、ガウスは最初に近似的に天体の軌道要素を求める段階で最小二乗法を使うことを想定していなかったようである。例えば 1 か月程度の観測に基づいてとりあえず天体の放物線軌道あるいは楕円軌道を計算する場合に最小二乗法を使うというよ

うなことをガウスは余り考慮していない。これは、少なくともケレスやパラスに関しては、「最初の近似的な軌道要素の算定」の段階で観測との誤差が概ね数秒ないし数十秒以内という良好な結果が得られていたためかも知れない。また、彗星の放物線軌道に関しては、実例が少ないものの、第 2 部第 3 章 7 で見たように、1804 年彗星では観測との誤差が概ね 30 秒ないし 1 分程度以内に収まった。これらの精度であれば、その推算暦に従い当該天体を探索・発見して観測するという実用上の目的に応えるには十分である。ガウスは 1810 年以降、数年間にわたってパラスの摂動計算に多大な労力を費やすが、彗星の軌道計算には終始余り情熱を注がなかったように見受けられる。むしろ、1810 年以降は、ベッセル、ニコライ、エンケらを念頭に「これ以上の細かい計算は若い人たちに任せる」というような言い回しが目立つ。以上のような事情を考慮すると、ガウスにとっては、天体の軌道計算において最小二乗法を使用することは補完的・補助的な意義しか有しなかったように思われる。「最小二乗法は自分の軌道決定法において本質的な役割を果たしているわけでない」という趣旨の記述（本章 4(1)参照）や自ら最小二乗法を使用して軌道計算を行った実例が少ないこと等はその証左と言えよう。

第 7 章　ベッセルの軌道計算法

119) この彗星の発見者はジョヴァンニと記されることがあるが、それは発見地のカストロジョバンニとの混同による誤りと考えられる。発見者は、イタリアのシチリア島のカストロジョバンニ（Castro Giovanni. 現在の名はエンナ Enna）在住のアウグスティヌス派の修道士パリジ(Parisi)とされる。J. Russell Hind, *The comets: a descriptive treatise upon those bodies,*（London: John W. Parker and Son, 1852), 154 参照。

120) ベッセルが 1810 年書に収録したこの彗星の観測データは、次の通りである。

1807 年	ブレーメン平均時	赤経	赤緯（北緯）
10 月 8 日	6 時 50 分 27 秒	231° 04' 06''.7	9° 09' 11''.8
9 日	6 時 31 分 04 秒	232° 04' 14''.4	10° 01' 31''.1
9 日	7 時 42 分 51 秒	232° 05' 18''.7	10° 04' 09''.3
11 日	7 時 00 分 36 秒	234° 04' 21''.6	—
11 日	7 時 15 分 12 秒	234° 04' 41''.0	11° 47' 29''.0
13 日	6 時 37 分 39 秒	236° 04' 21''.3	13° 27' 45''.2
14 日	6 時 39 分 25 秒	237° 03' 49''.4	14° 17' 35''.6
17 日	6 時 47 分 49 秒	240° 01' 03''.9	16° 43' 04''.5
18 日	8 時 35 分 20 秒	241° 03' 40''	—

19 日	6 時 28 分 56 秒	241° 57' 19".1	18° 15' 30".0
20 日	6 時 50 分 39 秒	242° 56' 44".2	19° 01' 04".7
23 日	7 時 47 分 59 秒	245° 54' 17".5	21° 14' 59".6
25 日	6 時 17 分 10 秒	247° 48' 03".5	22° 56' 17".3
27 日	8 時 30 分 45 秒	249° 51' 15".3	24° 01' 51".2
28 日	5 時 56 分 01 秒	250° 44' 32".1	24° 37' 25".3
31 日	6 時 07 分 29 秒	253° 43' 45".6	26° 33' 13".5
11 月 5 日	7 時 11 分 32 秒	256° 47' 44".3	28° 24' 31".7
5 日	5 時 59 分 26 秒	258° 46' 51".7	29° 33' 06".5
7 日	9 時 11 分 38 秒	260° 58' 46".4	30° 45' 16".0
8 日	7 時 11 分 20 秒	261° 55' 40".4	31° 15' 42".7
10 日	6 時 51 分 14 秒	264° 00' 20".2	32° 19' 16".6
11 日	8 時 40 分 50 秒	265° 08' 57".1	32° 52' 20".0
15 日	7 時 32 分 14 秒	269° 22' 52".3	34° 49' 21".6
22 日	7 時 25 分 32 秒	277° 05' 16".9	37° 53' 05".1
27 日	8 時 56 分 22 秒	282° 48' 40".6	39° 38' 45"
12 月 3 日	7 時 41 分 15 秒	289° 38' 14".3	41° 44' 40"
6 日	7 時 43 分 14 秒	295° 06' 07".1	42° 35' 30".5
10 日	7 時 33 分 50 秒	297° 42' 05".8	43° 36' 21".2
1808 年 1 月 1 日	8 時 02 分 22 秒	322° 06' 22".2	46° 57' 49".8
21 日	8 時 06 分 13 秒	341° 21' 06".5	47° 59' 33".0
23 日	9 時 29 分 26 秒	345° 08' 00".6	48° 01' 42".1
2 月 14 日	7 時 30 分 56 秒	0° 15' 53".3	48° 18' 09".5

121）この彗星の軌道要素については、ベッセルの計算したものが『月報』16 巻 1807 年 11 月号に掲載されており、また、ヨハン・ルートヴィヒ・ブルクハルト(Johann Ludwig Burckhardt, 1784-1817)がフランス学士院に提出した軌道要素も同号で紹介されている。*MC*, 16 (1807 Nov.) : 490, 492 参照。同年翌月の『月報』16 巻 12 月号には、ブヴァールがラプラスの方法に基づいて計算したとする軌道要素が掲載され、また、ベッセルがその後に改良した軌道要素も記されている。*MC*, 16 (1807 Dec.) : 562, 564 参照。これらはいずれも放物線軌道である。

122）ベッセルが 1807 年彗星の楕円軌道を初めて提示したのは、*MC,* 17 (1808 Jun.) : 554 であり、周期は 1953.2 年であった。次いで、新たな観測データを加えて改良を行い、*MC,* 18 (1808 Sep.) : 239 では、周期 1483.3 年の楕円軌道を算出した。そして、最後に最小二乗法を導入した改良を行い、1810 年 7 月 14 日付の『ベルリン天文年鑑』の編集者宛ての書簡で周期 1713.5 年の楕円軌道を示した（*BAJ* für 1813, (1810) : 188)。ベッセルの 1810 年の著書にはこれらの軌道要素の変遷の過程が逐一説明されている。結局、ベッセルが計算して発表した軌道要素は、放物線軌道が 3 組、楕円軌道が 3 組であるが、彼はこれらにⅠからⅥまでの通し番号を付けた。軌道要素Ⅲから軌道要素Ⅵまでの内容は以下の通りである。

●軌道要素Ⅲ　（放物線軌道）*MC,* 17 (1808 Jun.) : 553. [1808 年 4 月 21 日付書簡に記述]

近日点通過時刻・・・1807 年 9 月 18.82718 日（パリ平均時）
昇交点黄経　・・・・266° 36' 52".7　　　(平均分点)
近日点経度　・・・・271° 06' 07".5　　　(平均分点)
軌道傾斜角　　・・・ 63° 14' 28".1
近日点距離の対数・・・9.8122168
平均日々運動の対数・・0.2418031
周回の方向　・・・・・順行

●軌道要素Ⅳ　（楕円軌道）*MC,* 17 (1808 Jun.) : 554. [1808 年 4 月 21 日付書簡に記述]

近日点通過時刻・・・1807 年 9 月 18.74986 日（パリ平均時）
軌道傾斜角　　・・・ 63° 10' 53".2
昇交点黄経　・・・・266° 46' 03".1　　　(平均分点)
近日点経度　・・・・270° 56' 00".1　　　(平均分点)
近日点距離の対数・・・9.8105558
平均日々運動の対数・・0.2442946
離心率　・・・・・・・0.9958626
長半径　・・・・・・・156.253 AU
周期　　・・・・・・・1953.2 年

●軌道要素Ⅴ　（楕円軌道）*MC,* 18 (1808 Sep.) : 239. [1808 年 8 月 9 日付書簡に記述]

近日点通過時刻・・・1807 年 9 月 18.73709 日（パリ平均時）
軌道傾斜角　　・・・ 63° 10' 10".9
昇交点黄経　・・・・266° 48' 09".3　　　(平均分点)
近日点経度　・・・・270° 53' 50".9　　　(平均分点)
近日点距離の対数・・・9.8101466
平均日々運動の対数・・0.2449084
離心率　・・・・・・・0.99503415
長半径　・・・・・・・130.063 AU

周期　　・・・・・・・1483.3 年
運行　・・・・・・・・・順行

●軌道要素Ⅵ　（楕円軌道）*BAJ* für 1813, (1810)：188. [1810 年 7 月 14 日付書簡に記述]

近日点通過時刻・・・・1807 年 9 月 18.745366 日（パリ平均時）
昇交点黄経　・・・・・266° 47' 11".45　　　(平均分点)
軌道傾斜角　　・・・・ 63° 10' 28".10
昇交点と近日点の間隔・・4° 07' 30".49　　　(平均分点)
近日点距離　・・・・・・0.64612382 AU
近日点距離の対数・・・・9.81031575
平均日々運動の対数・・・0.2449084
離心率　・・・・・・・・・0.99548781
長半径　・・・・・・・・・143.195 AU
周期　　・・・・・・・・・1713.5 年

123) Friedrich Wilhelm Bessel, *Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Kometen,* (Königsberg: Friedrich Nicolovius, 1810) [以下 "Bessel (1810)" として引用する]：66-67.

124) ここでベッセルが算定した軌道要素の精確さをチェックしておこう。まず、軌道要素Ⅲの放物線軌道について、ベッセルは、この彗星出現の中央期に当たる 12 月初め頃において、算出された赤緯は平均して観測値よりも 64 秒過大であったと述べ、それ故、放物線軌道は否定されるとした。*MC,* 17 (1808 Jun.)：553. 次に、軌道要素Ⅳの楕円軌道については、1807 年 10 月 2 日から 1808 年 2 月 24 日までの 89 個の観測について計算値と観測値との差を記しているが、それを見ると、赤経については 7 割弱が 15 秒以内の誤差にとどまり、また、赤緯については 6 割強が 10 秒以内の誤差にとどまっている。*MC*, 17 (1808 Jun.)：555-556. これは既に相当精度の高い軌道計算であると言えよう。その約 1 年後に算定された軌道要素Ⅴの楕円軌道では、赤経については 7 割強が 15 秒以内の誤差にとどまっているので、軌道要素Ⅳより多少改善された感がある。しかし、赤緯については 10 秒以内の誤差にとどまったのが 5 割以下と悪化している。したがって、軌道要素Ⅴの方が軌道要素Ⅳよりも精確と評価してよいかは疑問である。実際、周期を見ると、軌道要素Ⅳでは 1953.2 年、軌道要素Ⅴでは 1483.3 年となっているが、最終の軌道要素Ⅵでは 1713.5 年と算定されており、軌道要素Ⅳと軌道要素Ⅴでは精確さに明確な優劣はないように思われる。軌道要素Ⅴに最小二乗法を適用して算出されたのが軌道要素Ⅵの楕円軌道である。ベッセルは、まず、1807 年 9 月 28 日、10 月 22 日、11 月 11 日、12 月 8 日、1808 年 2 月 21 日、3 月 23 日の 6 個を基準日とし、これらの日に行われた諸観測の平均値を「観測値」とした。そして各種の補正を施した「観測値」を軌道要素Ⅴと比較した場合の誤差を次のように算定した。Bessel (1810)：70 参照。

基準日	観測個数	黄経の誤差	黄緯の誤差
1807 年 9 月 28 日	6	− 8".93	− 4".17
10 月 22 日	24	＋ 3".08	＋ 11".02
11 月 11 日	14	＋ 5".15	＋ 15".09
12 月 8 日	6	＋ 2".33	＋ 6".14
1808 年 2 月 21 日	13	＋ 10".01	− 3".25
3 月 23 日	7	＋ 3".81	− 33".88

これがいわば軌道要素Ｖの誤差の代表値である。黄経の誤差が概ね数秒程度に収まっているのに対し、黄緯の誤差は 10 秒以上に広がっているのが目に付く。次に、軌道要素Ｖの基準日における観測値を基にして最小二乗法を適用し、最終の軌道要素Ⅵを算出した。その軌道要素Ⅵに基づく計算値と観測値との誤差は次のようになった。Bessel (1810) : 76 参照。

基準日	黄経の誤差	黄緯の誤差
1807 年 9 月 28 日	− 1".9	− 1".4
10 月 22 日	＋ 1".5	− 1".4
11 月 11 日	− 0".9	＋ 5".1
12 月 8 日	− 1".9	＋ 0".6
1808 年 2 月 21 日	− 2".2	− 0".2
3 月 23 日	− 4".3	− 6".5

なお、この表では、観測の精度を考慮に入れて、12 月 8 日と 2 月 21 日の誤差については算出された誤差の数値に 0.5 を掛け、3 月 23 日の誤差については同じく 0.25 を掛けている。これは、この彗星が次第に地球から遠ざかっていることに鑑み、観測期間の後半ほどそもそも観測の精度自体が低下しているという考えによるものである。Bessel (1810) : 76 参照。こうして、最小二乗法を使用して得られた軌道要素Ⅵの楕円軌道については、観測との誤差が概ね 5 秒以内に収まるという良好な結果が得られたことが注目される。

第 8 章　ガウスの 1811 年論文について

125) 以下の発表刊行物における『月報』は *MC*（*Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde*）を指し、『年鑑』は『ベルリン天文年鑑』（*BAJ*）を指す。

126) Carl Friedrich Gauss, “Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809,”

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Vol I. (Gottingae 1811), Classis Mathematicae 3-26 ; *Werke,* 6 : 1-24. この論文はラテン語で書かれている。なお、カール・F・ガウス(飛田武幸・石川耕春訳)『誤差論』(紀伊國屋書店、1981 年), 114-127 頁にこの論文の抄訳がある。

127) それらのパラスの位置についての観測データは次の通りである。

衝の時刻(ゲッティンゲン平均時)	1803 年初頭からの日数	日心黄経(=地心黄経)	地心黄緯
1803 年 6 月 30 日 0 時 27 分 32 秒	181.019120	277° 39' 24".0	+46° 26' 36".0
1804 年 8 月 30 日 4 時 58 分 27 秒	608.207257	337° 00' 36".1	+15° 01' 49".8
1805 年 11 月 29 日 11 時 15 分 4 秒	1064.468796	67° 20' 42".9	−54° 30' 54".9
1807 年 5 月 4 日 14 時 37 分 41 秒	1585.609502	223° 37' 27".7	+42° 11' 25".6
1808 年 7 月 26 日 21 時 17 分 32 秒	2034.887176	304° 02' 59".7	+37° 43' 53".7 (不確実)
1809 年 9 月 22 日 16 時 10 分 20 秒	2457.673843	359° 40' 04".4	−7° 22' 10".1

128) これらのうち、αだけは、まだ$d\lambda$が求められていないので未知量だが、λに比べて$d\lambda$は相当に小さいので、αの代わりにλの値を用いて計算して差し支えないものと思われる。

129) ガウスは、1808 年の地心黄緯の値は不確実だとして計算対象から除いたので、方程式の個数は 11 となった。

130) ガウスはパラスの摂動の計算に多くの労力を費やしたが、結局その計算が未完に終わったことはよく知られている。パラスの軌道が木星から受ける影響に関しては、両者の周期の比が問題になる。もしそれが簡単な整数比である場合には、数回の周期ごとに同じ位置関係が繰り返されることになる。それ故、数回の周回ごとに必ず両者が接近してその影響が次第に積み重なることもあるし、逆に、パラスが遠日点通過時に木星軌道に接近しても木星は決してその周辺に存在しないというケースもあり得る。ガウスは 1812 年 4 月 25 日付発行の *GGA* への寄稿において、「パラスに対する木星の影響を研究していて非常に興味ある事実を発見したが種々の理由で今はその内容を数字で記すにとどめ将来その解読の鍵を与える」旨を述べて、1111000100101001 という数字のみを示した。*GGA*, 67 (1812 April 25) : 658 ; *Werke*, 6 : 350 参照。ガウスは 1812 年 5 月 5 日付のベッセル宛書簡で上記の暗号の意味をあなたに教えるが口外しないでほしいと断った上で、パラスと木星の周期の比が

7:18 という意味だと告げている。*Werke*, 7：421. なお、オルバースの 1812 年 4 月 5 日付のガウス宛書簡によれば、オルバースはパラスと木星の周期の比が 7:18 だというガウスからの知らせにすっかり魅了されたと書いているので、ガウスは GGA に上記の思わせぶりな暗号を寄稿する前に、オルバースにはこの事実を知らせていたわけである。*Werke*, 7：421 参照。こうしてこの暗号の内容は一般に知られているのだが、上記の数字がなぜそのような意味になるのかは謎とされてきた（例えば、Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil 1 (Berlin, Verlag von Julius Springer) (1926): 9-10；その訳書として、Felix Klein, (彌永昌吉監修、足立恒雄・浪川幸彦監訳、石井省吾・渡辺弘訳)、『クライン：19 世紀の数学』(共立出版、1995)：10 参照)。しかし、近年の研究により、その謎は既に解明されたと考えてよい。すなわち、上記の数字を 111・1000・10010・1001 と 4 つに分解し、これを 2 進法の数字とみて通常の 10 進法表記に直すと、7・8・18・9 となる。当時知られていたベスタ、ケレス、ジュノー、パラスを惑星の一員としてこのように遠日点距離が小さい順に並べると、水星から数えてパラスは 8 番目、木星は 9 番目の惑星となる。すなわち、上記の数字は 7 (パラス)：18 (木星) という周期の比を表していると解されるわけである。この解読については、例えば、Eric G. Forbes, “The astronomical work of Carl Friedrich Gauss (1777-1855),” *Historia Mathematica* 5 (1978)：174-175 参照。

131) *Werke,* 6：15-16 ;『誤差論』117 頁参照。

132) ガウスが 1811 年論文において最小二乗法を使用した結果、パラスの軌道要素がどの程度精確になったのかをここで検討しておこう。最小二乗法に基づいて算出されたパラスの軌道要素は次の通りである。

平均経度の元期(1803 年。ゲッティンゲン子午線)・・・・	221° 34' 53".64
平均日々経度運動 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・	770".5010
近日点経度（1803 年)・・・・・・・・・・・・・・・・	121° 08' 08".54
昇交点黄経（1803 年)・・・・・・・・・・・・・・・・	172° 28' 12".43
軌道傾斜角 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	34° 37' 28".35
離心率（＝sin 14° 09' 59.79") ・・・・・・・・・・・・・・	0.2447424
長半径の対数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	0.4422071

この軌道要素に従って計算されたパラスの衝の位置と観測値との誤差は、ガウスによれば、次の通りである。

衝を観測した年	衝の時点における黄経の誤差	衝の時点における黄緯の誤差
1803 年	− 111".00	− 8".31
1804 年	＋ 59".18	− 36".67

1805 年	＋　19".92	＋　0".07
1807 年	＋　85".77	＋　25".01
1808 年	＋　135".88	＋　28".72
1809 年	－　216".54	＋　83".01

これによれば、1805 年を除いて、黄経については 1 分～3 分半程度の誤差があり、黄緯については 30 秒前後ないし 1 分半近い誤差がある。これは軌道計算としては相当に大きな誤差である。現に、既に見たように、1802 年にガウスが算定したパラスの軌道要素(第 3) においては、同年 4 月 4 日から 5 月 16 日までの間の観測との誤差の多くは 5 秒以内に収まっている（第 2 部第 3 章 5 参照)。しかし、パラスの場合、そのような軌道計算の精確さは短期間しか保証されないと考えられる。ガウスによれば、1808 年の衝においては計算値と観測値の乖離が 4 分ほどになり、1809 年の衝ではそれが 12 分にもなったという。*Werke,* 6 : 4 ;『誤差論』115 頁参照。そのような誤差の主たる原因は木星等の影響による摂動にあると考えられるが、そのような摂動を受けてパラスの楕円軌道は普段に変化するのであるから、最小二乗法を用いて精確な軌道計算を試みても長期的には相当の誤差が生ずることは避けられないであろう。むしろ最小二乗法を用いると 1808 年については誤差が半減し、1809 年については誤差が 3 分の 1 以下になったと言えるのであるから、最小二乗法の効果は（上記のように誤差は相当に大きかったものの）1811 年論文によって十分に立証されたと評価してよいと思われる。

第 9 章　ニコライの 1813 年論文について

133) ガウスが『月報』編集者宛に送った 1811 年 11 月 15 日付の論稿の中には、ガウスが算出した 1811 年のフロジェルグ大彗星の放物線軌道を最新の観測結果と比較したときの誤差をニコライが計算した旨の報告がある。*MC,* 24 (1811 Nov.) : 515-517 ; *Werke*, 6 : 341-342 参照。このとき、ニコライはガウスの下で数学を学び始めたばかりの 18 歳の学生だった。ガウスがニコライの優れた計算能力に直ちに着目したことがうかがえる。なお、その後もガウスの天文関係の論稿にはニコライの計算した結果が頻繁に紹介されている。*MC,* 24 (1811 Dec.) : 598 ; *Werke*, 6 : 344, *MC,* 27 (1813 April) : 388 ; *Werke*, 6 : 365, *GGA*, 176 (1813 Nov. 4) : 1754 ; *Werke*, 6 : 370, *MC,* 28 (1813 Dec.) : 575 ; *Werke*, 6 : 371 に掲載されたガウスの諸論稿参照。

134) なお、1811 年 3 月には有名なフロジェルグ大彗星が発見されており、これが 1811 年第 1 彗星である。このフロジェルグ大彗星の周期は 3 千年余と算定されている。Kronk, vol. 2 : 26-27 参照。

135) *BAJ* für 1815 (1812) : 192 ; *Werke,* 6 : 352. この論稿の中でガウスは、1811 年 12 月 12 日の観測後に自分が計算した放物線軌道を載せることはやめて、代わりにニコライが 1812 年 1 月 4 日の観測後に計算した結果を報告するとして、次のような放物線軌道要素を示した。

近日点通過時刻　1811年11月11.39211日(ゲッティンゲン子午線)
近日点経度　47° 39′ 36″.1
近日点距離の対数　0.2011781　(= 1.5891983 AU)
昇交点黄経　92° 53′ 44″.2
軌道傾斜角　31° 32′ 38″.7
運行　順行

この放物線軌道と観測との誤差は、ニコライの計算によれば、次の通りである。

	赤経の誤差	赤緯の誤差
1811年12月 9日	－　5″.0	＋　3″.4
12月 11日	＋　2″.9	－　32″.7
12月 12日	＋　8″.5	－　27″.6
1812年 1月 3日	－　6″.5	＋　0″.3
1月　4日	＋　2″.8	－　12″.7
2月　2日	－　113″.7	＋　18″.1

ガウスはこの論稿でニコライのことを「極めて熟達した計算者」と形容し、彼がその後の観測を取り入れてさらに軌道の改良を行うであろうと予告した。*BAJ* für 1815 (1812) : 193 ; *Werke*, 6 : 353. このような記述からも、彗星の軌道に関する多大な計算をなるべく若手に任せようとするガウスの方針がうかがわれる。

136) Friedrich Bernhard Gottfried Nicolai, "Über die Bestimmung der wahren Bahn des zweyten Cometen von 1811," *MC*, 27 (1813 März) : 201-221.

137) *Id.* : 210.

138) *Id.* : 211. これは離心率が1に近い楕円軌道において、与えられた時刻における真近点角を簡単に計算する方法である。

139) ここでニコライが選んだ軌道要素に関する6個の変数をガウスの1811年論文と比較すると、近日点経度、離心率、昇交点黄経、軌道傾斜角は共通だが、残りの2個は違っている。すなわち、ガウスは観測時の平均経度と平均日々運動を選んだのに対し、ニコライは近日点通過時刻と近日点距離を選んでいる。近日点通過時刻と近日点距離は軌道要素として通常用いられる値であるからニコライの変数の選定の方が好ましいと言えよう。ニコライはこの1次式の導出に当たってガウスの『天体運動論』を随所で参照・引用しているが、ガウスの1811年論文には一切言及していない。*Id.* : 212-213 参照。 6個の変数の微小な変化によって地心経度及び地心緯度に生ずる微小な変化を表す1次式をニコライが詳しく示していないのは残念だが、いずれにせよニコライが最小二乗法適用の前提となる1次式を導くに際して、ガウスの1811

年論文の影響が余り表面に現れていない点は注目される。

140) ニコライは1813年論文の最後で、この楕円軌道と1811年第2彗星のすべての観測(赤経・赤緯表示。1811年11月18日から1812年2月16日までの66個)との差異を示した。その多くは30秒以内に収まり10秒以内のものも多いので、概ね良好な結果と言えよう(赤経・赤緯の誤差なので本文掲載の表の黄経・黄緯の誤差とは異なる)。但し、1812年2月9日以降は1分以上の誤差が連続しかつ増大する傾向にある点は注意を要すると思われる。*Id.* : 219-220.

141) 1909年のNekrassowの計算によれば、この彗星の軌道要素は、

近日点通過時刻	1811年11月11.5427日
近日点引数	314°.5022
昇交点黄経	95°.6302 (2000年分点)
軌道傾斜角	31°.2553
近日点距離	1.581701 AU (対数表示：0.19912439)
離心率	0.980916
周期	755年

とされている。Kronk, vol. 2 : 30 参照。

第10章　1812年以降の周期彗星の発見について

142) エンケの名が天文学関係の雑誌に登場するのは1812年の『月報』が最初である。*MC,* 26 (1812 Sep.) : 297-299 ; *Werke* 6 : 360-361 参照。ガウスはそこでエンケを「才能豊かな若者で、熟達しかつ注意深い計算者」と形容し、彼にケレスとパラスの永年摂動に関する計算をさせた結果を紹介している。さらに、1812年12月24日付発行のGGAへの寄稿において、ガウスは当時21歳のエンケを紹介して「我々の下で天文学を学んで素晴らしい成果を挙げており、既に天文計算に極めて熟達している」と述べている。*GGA*, 205 (1812 Dec. 24) : 2044 ; *Werke* 6 : 363 参照。また、『月報』1813年4月号において、エンケは、同年2月に発見された1813年第1彗星に関して、その観測および軌道計算を行うガウスの「有能な学生」として紹介されている。*MC,* 27 (1813 Apr.) : 388-389 ; *Werke* 6 : 364-365 参照。ここでもガウスが彗星の軌道改良等の細かい計算作業をエンケらの若手に委ねている様子がうかがえる。なお、エンケが自己の名で彗星の軌道計算に関する論文を発表したのは、次注143)のポンス・ブルックス彗星に関する1816年の論文が最初である。

143) Johann Franz Encke, "Ueber die wahre Bahn des Cometen von 1812," *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* (以下"*ZA*"と略す) 2 (1816 Nov.-Dec.) : 377-403. この論文において、エンケは、まず、1812年彗星(ポンス・ブルックス彗星)の各地の観測データを収集・整理し、1813年当時に算定したが未公表だった周期72.5年の楕円軌道を示した。その軌道で計算すると、観測データとの誤差が50秒以内に収まる赤経・赤緯が8割程度あったので、比較的良好な数値と言えよう。エンケは1816年までに軌道計算を再検討し、最小二乗法を用いて軌道改良を図った。その際の条件方程式に

は、近日点距離、近日点通過後の経過時間、近日点経度、昇交点黄経、軌道傾斜角、離心率の 6 個の量の微小な変化量を用いているが、それらの変化量を導出する公式は特に示されていない。最小二乗法を適用した結果、周期 70.6855 年の楕円軌道が得られた。エンケは観測の精度を考慮して、実際の周期が取り得る値の範囲を 66.5432 年から 75.2736 年の間とした。

144) *Id.* : 394. エンケは計算値から観測値を引いて得られる誤差のほかに、観測の精度を考慮に入れた「誤差の可能範囲」(wahrscheinlicher Fehler)を重視している。これは観測値自体が既に誤差を含んでいると考えて、彗星の真の存在位置の範囲をより広く取るものである。エンケは、その範囲をどれだけ広げるかという係数を地球と彗星の距離や観測のしやすさ等を勘案して算定しているが、その係数は最大でも 3 程度である（最も好条件件の観測の係数を 1 とする)。*Id.* : 391. すなわち、計算値から観測値を引いて得られる誤差に対して、観測状況の良好度に従い 1 ないし 3 程度の係数を掛けた値を「誤差の可能範囲」として算定する。ポンス・ブルックス彗星の場合、5 個の基準点における「計算値から観測値を引いて得られる誤差」は赤経について 10 秒以下、赤緯について 20 秒以下だが、所定の係数を掛けた「誤差の可能範囲」は赤経について 30 秒以下、赤緯について 33 秒以下と拡大している。*Id.* : 394.

　また、エンケは周期 100 年を仮定すると観測との誤差はどうなるかという試算も行った。その結果は、誤差が概ね 5 割ほど増加するというものであり、したがって周期が 100 年を超えることはないだろうという結論が得られた。*Id.* : 396.

145) 最小二乗法を用いて 1816 年に得た楕円軌道の誤差は、最小二乗法によらないで 1813 年に得た楕円軌道の誤差より相当に良好といえる。しかし、周期については事情が異なる。近時の研究によれば、ポンス・ブルックス彗星の周期として 72.6 年という数字が提示されているが(Kronk, vol. 2 : 32)、もしこの周期が 1812 年当時にも当てはまるとすれば、1813 年の計算（周期 72.5 年）の方が 1816 年の計算（周期 70.6855 年）より精確だったことになる。これは、最小二乗法を用いると観測が行われた期間の太陽周辺の軌道を精確化することはできるが、それでも周期を精確に求めるのは難しいということを示していると言えよう。

146) *ZA,* 1 (1816 März & April): 342-350 には、オルバース彗星に関して編集者リンデナウに宛てたベッセルの 5 通の書簡が掲載されている。それらは、① 1815 年 7 月 2 日付、②同年 7 月 17 日付、③同年 7 月 24 日付、④同年 11 月 24 日・27 日付、⑤1816 年 1 月 10 日付、の 5 通である。①では暫定的に算出した楕円要素が示され、周期は 73.0039 年とされた。ベッセルは、この軌道要素で既にかなり良い近似が得られるが 7 月現在で赤経の誤差が 1 分を超えるようになったのでもう少し改良が必要だと述べている。*Id.* : 342-343. ②では、改良した楕円軌道で計算した場合と観測（1815 年 3 月 20 日から 6 月 5 日までの 21 個）との誤差の一覧が示されているが、赤経の約 8 割及び赤緯の全部が 1 分以内の誤差に収まるという良好な結果になっている。*Id.* : 343-

344. ③では、その後の観測を加えて改良した楕円軌道が提示されたが、周期は 73.89682 年となるなどそれほど大きくは変わっていない。また、この書簡でベッセルはこの 1815 年彗星を発見者の名を取って「オルバース彗星」と呼ぼうという提案をしている。*Id.* : 346. ④では、多数の観測に基づいてこの彗星の摂動を調べている旨の記述があり、摂動の効果は 1807 年の大彗星の場合より著しいとしている。*Id.* : 347-348. ⑤では、1815 年 3 月 17 日から同年 8 月 9 日までの間で選んだ 10 個の基準点を基にして算定した最終的な軌道要素が示され、周期は 74.04913 年とされた。この最終的な軌道要素の 10 個の基準点における観測との誤差は赤経・赤緯とも 1 個を除いてそれぞれ 6 秒以下、5 秒以下に収まるという極めて良好な結果になった。この書簡で注目されるのは、「可能な誤差の範囲」を各軌道要素について算定していることである。ベッセルによれば、これはガウスとラプラスの確率論を使って得たとされ、各観測における可能な誤差を 7.935″と見積もった上で、そこから生じる各軌道要素の「可能な誤差の範囲」を示している。例えば周期については 101 日という不確かさがあるとしている。さらに、ベッセルは、他の惑星の影響による摂動の効果として、1815 年 4 月 26 日から同年 8 月 4 日までの間に周期が 6.82 日減少したと述べている。そして、その後、この彗星が次に現れる 1887 年までの摂動によって受ける周期の減少を、木星により 775.70 日、土星により 30.39 日、海王星により 9.32 日、それらの掛け合わせにより 2.28 日、合計 824.51 日と算定し（但しその算定の仕方は説明されていない)、結局、次回の近日点通過は 1887 年 2 月 9 日になろうと予言した（実際には 1887 年 10 月 8 日だった)。このように、オルバース彗星について、観測の期間中及びその後の摂動をも考慮に入れて軌道を計算したのは、ほとんどベッセルだけだったといってよい。

147) ガウスは、1815 年 7 月の *GGA* への寄稿において、自己の計算による放物線軌道及び周期 77.5 年の楕円軌道の軌道要素をそれぞれ示した上で、後者の方が観測データにより良く合致すること、また、後者の周期は今後のより精確な計算によって増大することがあったとしても 100 年を超すことはないと思われる旨を述べた。*GGA*, 105 (1815 Jul. 3) : 1041-1043 ; *Werke*, 6 : 385-387. また、同年 9 月の *GGA* への寄稿において、同年 3 月から 8 月までの 12 個の観測データをまとめ、ベッセルおよびニコライが楕円軌道として計算した場合の各結果を紹介している。*GGA*, 149 (1815 Sep. 18) : 1473-1476 ; *Werke*, 6 : 389-391.

148) ニコライは、オルバース彗星の観測データをできる限り集め、それらに基づいてまず楕円軌道を算定した。*ZA*, 1 (1816 März & April) : 283-324 参照。その赤経・赤緯の観測との誤差は 20 秒から 1 分程度のものが多かった。*Id.* : 293-296. ニコライは、同じ日の複数の観測の間でかなり経度・緯度の差が見られることから、そもそも彗星の観測値においては 10 秒から 15 秒程度の精確さを保証するのは難しいとして、複数の観測値の平均を求める等の方法により、11 個の基準点の経度・緯度を定め、そこから出発して軌道要素の精確

化を図ることにした。これらの基準点における誤差は、黄経につき 31 秒以内、黄緯につき 45 秒以内となった。*Id.* : 300. ニコライはそれについて最小二乗法を適用し、22 個の 1 次方程式を作って誤差が最小となるような各軌道要素の変化量を求め、最終的な軌道要素を算出した。それによれば、11 個の基準点における誤差は、9 個の黄経が 5 秒以内、9 個の黄緯が 10 秒以内に収まった。*Id.* : 305. この結果については、最小二乗法の効果が発揮されたと評価してよいであろう。

149) オルバース彗星の周期は、近時の計算では 69 年程度とされている。次回の太陽接近は 2024 年 7 月の予定。

150) この 4 回の観測は、経度・緯度とも分単位程度の精度であり、観測時の状況も良好でなく、信頼性の高くないものであった。そのため精度の高い軌道計算は無理であり、さらなる観測がなければこの彗星の軌道は不確かなままに終わるだろうとエンケは述べている。*BAJ* für 1821, (1818) : 166 参照。

151) クロンメリン彗星に関する以上の記述については、Kronk, vol. 2 : 42 参照。

第 11 章　1810 年代における軌道計算の水準について

152) 最小二乗法が天体の軌道計算において果たした役割は、本論文の重要な論点の 1 つであり、第 3 部でも再び取り上げる。

153) 例えば、ベッセルを天文台長に迎えてケーニヒスベルク天文台が設置されたのは 1810 年である。また、1810 年代におけるゲッティンゲン天文台の観測機器の進展については、Dunnington, *supra* note 45) : 95-98; 及びその訳書である、ダニングトン・前注 45) : 90-93 参照。

154) エンケによる史上初めての超短周期彗星（エンケ彗星）の発見の経緯については第 3 部で詳しく考察する。

155) 天体の楕円軌道を 3 個の観測から計算する方法はガウスが 1801 年に案出し、1809 年の『天体運動論』で公開された。その計算方法によれば、ケレスやパラス等の小惑星については数秒程度の誤差で軌道を精確に計算できる。しかし、同様の方法で彗星の楕円軌道特にその周期を精確に算定することはできなかった。その原因として考えられるのは、小惑星の観測から算出される小惑星と太陽の間の観測時の距離はその小惑星の遠日点と著しく異ならないが、彗星の観測から算出される彗星と太陽の間の観測時の距離は通常その彗星の遠日点の数分の 1 かそれ以下に過ぎないという事実である。太陽から遠日点までの距離が精確に求められなければその周期を精確に算定することはできない。したがって、ケレスやパラスの軌道を 3 個の観測からいかに精確に計算できても、彗星の場合はまた話が別であると認識しなければならない。第 2 部第 5 章で見たように、1805 年第 2 彗星(ビエラ彗星)についてガウスは 1806 年にその周期を約 4.74 年と計算したが(実際は約 6.6 年)、そのような「誤り」の一因は観測時における彗星の日心距離が遠日点距離に比して相当に小さいことにあると考えてよいのではないかと思われる。

第 3 部　エンケ彗星発見の過程の考察 ―― 1819 年を中心に

第 1 章　概説

156）特別摂動の計算における「エンケの方法」については、後注 203)参照。

157）もっとも第 1 部で見たように、1770 年に観測されたレクセル彗星は、回帰未確認のため一般には公認されなかったものの実質的には周期 5 年余の超短周期彗星だったことに注意する必要がある。また、第 2 部第 5 章で見たように、1805 年第 2 彗星（ビエラ彗星）について、ガウスは、周期約 4.7 年の周期彗星である可能性を指摘していた（実際の周期は約 6.6 年）。さらに、第 2 部第 10 章で見たように、1812 年には周期 70 数年のポンス・ブルックス彗星が発見され、また 1815 年には周期約 70 年のオルバース彗星が発見されていた。これらの彗星も 1819 年の時点ではまだ 2 度目の回帰が確認されておらず周期彗星として未公認だった。

158）エンケによる超短周期彗星の発見をガウスが直ちに正しいと承認して称賛したことは一般に知られている。このことは、ガウスによる承認と称賛を掲載した *GGA,* 83 (1819 May 24) : 825-829 の記事が *Werke*, 6 : 420-422 に収録されていることからもうかがえる。しかし、1805 年彗星と 1818 年彗星の同一性の立証という多大な労力を要する計算作業に取り組むことをガウスが当初から積極的にエンケに勧めたことや、後述のように 1805 年彗星の摂動の計算にあたってエンケが学生時代にガウスから伝授された計算方法を用いたこと等はこれまでほとんど指摘されていなかったと思われる。

第 2 章　超短周期彗星の発見に至る経過

159）当時の時刻表示では当日の正午を 0 時としていたので、「1 月 25.0 日」は現在の「1 月 25 日 12 時 0 分」に当たる。

160）*Werke*, 6 : 417 では「近日点距離の対数」は「0.52933」となっているが、*GGA,* 28 (1819 Feb. 18) : 274 では、「9.52933」となっている。「0.52933」では 1818 年彗星の近日点距離が約 3.38 AU となって明らかに過大だが、「9.52933」ならば、エンケが算出した楕円軌道要素における近日点距離の対数= 9.57820 にもかなり近く、妥当な値である。したがって、以下では *Werke*, 6 : 417 におけるニコライの「近日点距離の対数」の 1 位の 0 は 9 の誤りとして扱うことにする。

161）ニコライが算出したこの放物線軌道要素は、エンケの算出した楕円軌道要素と共に、ガウスにより *GGA,* 28 (1819 Feb. 18) : 273-274 において紹介された。*Werke*, 6 : 417 参照。このニコライの軌道計算は、1818 年 12 月 22 日・25 日・29 日の 3 回の観測に基づくものである。

162）ここでハーディングの観測データについて触れておく。ガウスが執筆した *GGA,* 28 (1819 Feb. 18) : 273-278 の記事には、ハーディングの観測した 1818 年 12 月 25 日から 1819 年 1 月 12 日までのデータも掲載されている。ガウスとハーディングはゲッティンゲン大学の同僚だから、ガウスがこのデータを知っていたのは当然だが、エンケは当初はこのハーディングのデータを知らなかった。それ故、エンケは最初の段階ではニコライと自分のデータのみに基づいて軌道計算を行ったのである。

163）もっともガウスからエンケ宛の 1819 年 2 月 25 日付の書簡の一部は『全集』に収録されている。*Werke,* 11-1：276-277（パラスの観測結果について）及び *Werke*, 12：200-201（可能な誤差について）参照。

164）エンケによるこの 5 個の観測データは、*GGA,* 28 (1819 Feb. 18)：274 に掲載され、*Werke*, 6：417 にも収録されている。

165) 2 月 5 日書簡は、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/2609 で閲覧できる(2017 年 11 月 1 日確認)。この引用部分については、全 4 枚から成る書簡の中の 1 枚目から 2 枚目にかかる部分を参照。

166）以下の引用文中の[　] は著者(植村)による補足である。なお、前注 35)で述べたように、書簡や記事の内容の概要を紹介する場合は《　 》で囲むことにする。

167）以下の書簡内容については https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/2609 (2017 年 11 月 1 日確認)の 2 枚目の部分を参照。なお、ここで示された軌道要素や誤差の計算値は、*GGA,* 28 (1819 Feb. 18)：275 に掲載され、*Werke*, 6：418 にも収録されている。

168）ポンの観測データは、「1818 年 11 月 27 日 8 時 46 分：赤経 332° 22′、赤緯 8° 2′。11 月 28 日 8 時 0 分：赤経 332° 2′、赤緯 7° 48′。」というものであり、これは例えば、*Correspondance Astronomique, Geographique, Hydrographique et Statistique du Baron de Zach* (以下"*CA*"と略記する), 1 (1818)：518-519 でも紹介されている。このデータは分までしか測定しておらず、それをエンケは「粗い」と評したものと思われる。そのため、エンケは、楕円軌道を想定する際にこのポンのデータの助けを借りたことは認めているものの、後出の本文にあるように、誤差の評価対象からはポンのデータを外している。また、ガウスも、1818 年彗星の軌道計算の誤差評価に関して、ポンの数字は考慮しない方がよいだろうという趣旨のことを述べている。*GGA,* 28 (1819 Feb. 18)：275、*Werke*, 6：418 参照。

169）1805 年彗星と 1818 年彗星が同一である可能性について、最初に気が付いたのは誰かという問題がある。現在入手し得る資料を参照する限り、エンケの 2 月 5 日書簡以前に両彗星の同一性について言及した資料は見当たらないので、エンケが最初に独力で気が付いたと考えてよいと思われる。この点について一部には、両彗星が同じものではないかというポンの示唆を受けてエンケが 1818 年彗星の軌道要素の計算を始めたとする記述が存するが、その根拠は特に示されていない。https://ja.wikipedia.org/wiki/ヨハン・フランツ・エンケ (2017 年 11 月 1 日確認）参照。前述のように、エンケは周期 3.6 年の楕円軌道を算出する過程で「ポンの報告」の助けも借りたことを認めているが、この「ポンの報告」は 1818 年彗星についての観測結果を指しており、1805 年彗星とは無関係である。このことは、例えば *CA,* 1 (1818)：518-519, 601-603 に掲載された 1818 年彗星に関するポンの観測結果や書簡等において、1805 年彗星についての言及が全く見られないことからも明らかである。

170）以下の書簡内容については、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/2609

(2017 年 11 月 1 日確認)の 3 枚目の部分を参照。

171) この 1805 年彗星の軌道要素はベッセルが計算したものである。この軌道要素は *MC*, 13 (1806): 80)に掲載された。なお、*GGA*, 28 (1819 Feb. 18) : 276 及び *Werke*, 6 : 418 とも 1805 年彗星の近日点通過時刻を"1818 November ...." と記しているが、これは明らかに"1805 November ...."の誤りである。

172) *GGA*, 28 (1819 Feb. 18) : 273-278 ; *Werke*, 6 : 417-419 参照。なお、当時の *GGA* は概ね週 3 回程度発行され、各号は数頁ないし十数頁程度であった。

173) ニコライが算定した暫定的な放物線軌道要素については、前注 172)参照。ガウスは、その寄稿において、次の観測データを公表した。

●ニコライの観測データ

	マンハイム平均時	赤経	赤緯
1818 年 12 月 22 日	6 時 51 分 48 秒	326° 18′ 13″	2° 54′ 05″
12 月 22 日	8 時 45 分 37 秒	326° 16′ 59″	2° 52′ 24″
12 月 23 日	7 時 11 分 25 秒	326° 03′ 39″	2° 40′ 26″
12 月 24 日	7 時 14 分 03 秒	325° 48′ 33″	2° 26′ 59″
12 月 25 日	6 時 48 分 49 秒	325° 32′ 49″	2° 13′ 34″
12 月 29 日	7 時 00 分 31 秒	324° 19′ 58″	1° 10′ 57″

●ハーディングの観測データ

	ゲッティンゲン平均時	赤経	赤緯	
1818 年 12 月 25 日	6 時 39 分 52 秒	325° 33′ 30″	2° 14′ 49″	(+)
12 月 26 日	5 時 58 分 32 秒	325° 17′ 08″	2° 00′ 31″	(〃)
12 月 27 日	6 時 07 分 10 秒	324° 59′ 15″	1° 45′ 05″	(〃)
12 月 28 日	6 時 24 分 08 秒	324° 40′ 17″	1° 27′ 31″	(〃)
1819 年 1 月 1 日	6 時 36 分 16 秒	323° 11′ 48″	0° 14′ 58	(〃)
1 月 7 日	6 時 39 分 41 秒	319° 53′ 59″	2° 19′ 59″	(−)
1 月 8 日	7 時 37 分 34 秒	319° 15′ 28″	2° 51′ 49″	(〃)
1 月 12 日	6 時 06 分 7 秒	315° 36′ 53″	5° 35′ 24″	(〃)

●エンケの観測データ

	ゼーベルク平均時	赤経	赤緯	
1819 年 1 月 1 日	6 時 38 分 46 秒	323° 11′ 36″	0° 14′ 38″	(+)
1 月 4 日	7 時 26 分 56 秒	321° 43′ 43″	0° 54′ 59″	(−)
1 月 5 日	7 時 12 分 12 秒	321° 10′ 03″	1° 20′ 57″	(〃)
1 月 6 日	5 時 49 分 48 秒	320° 35′ 14″	1° 47′ 57″	(〃)
1 月 12 日	6 時 16 分 32 秒	315° 35′ 20 ″	5° 35′ 26″	(〃)

174) ガウスからエンケへの 1819 年 2 月 25 日付書簡は、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/136 (2017 年 11 月 1 日確認) で閲覧できる。この引用部分については、全 3 枚から成る書簡の中の 1 枚目を参照。

175) 前注 171)参照。

176) 3 月 15 日書簡は、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/2610 で閲覧できる(2017 年 11 月 1 日確認)。以下の引用部分については、全 4 枚から成る書

簡の中の 1 枚目から 2 枚目を参照。

177) この引用部分については、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/2610 (2017 年 11 月 1 日確認)の 2 枚目から 4 枚目を参照。

178) 以下の記述は、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/2611 (2017 年 11 月 1 日確認)の主要部分の要約である。同書簡の 1 枚目及び 3 枚目から 5 枚目までを参照。

179) ここで言及されているガウスの計算方法は、ガウスの命により、当時はまだ非公開とされていた。後出第 3 部第 4 章参照。

180) この「6.9717990」は太陽の質量を 1 とした場合の木星の質量の対数を 10 の補数の形で表したものである。すなわち、木星の質量は、太陽の質量の 10^(6.9717990－10)＝0.000937128 倍となる。

181) エンケが依拠した「ベッセルの公式」とは何を指すかについてエンケは明言していないが、ベッセルの 1810 年書の第 2 章の第 2 節・第 3 節(同書 43-82 頁)に現れた諸公式の一部を指すかと思われる。そこでは、軌道要素の諸量を時間で微分した場合の値を軌道に関する諸量で表す式等が示されている。

182) この「以前に私が犯した誤り」が何を指すかは必ずしも明らかでないが、ガウスは 1819 年 2 月 25 日付のエンケ宛書簡で「可能な誤差」の算定に関してエンケが誤りを犯している旨を指摘しているので、それを指している可能性が高い。Werke, 12 : 200-201 参照。

183) *GGA,* 83 (1819 May 24) : 825-829 ; *Werke*, 6 : 420-422 参照。もっとも、ここでガウスが紹介したデータや計算結果は、最終的な 2 組の軌道要素（1805 年彗星の 1819 年初めの軌道要素及び精査し直した 1818 年彗星の軌道要素）と今後の位置予想のみである。5 月 12 日書簡に記されたそれ以外のデータや計算結果は、数か月後に、*CA,* 2 (1819) : 496-499 や Johann Franz Encke, "Ueber einen merkwürdigen Kometen, der wahrscheinlich bei dreijähriger Umlaufzeit schon zum viertenmale bei seiner Rückkehr zur Sonne beobachtet ist," *BAJ* für 1822 (1819) : 180-202 で発表された。

184) この記事では、木星の影響による摂動の計算をエンケ氏は「ガウス氏の方法(Methode)に従って」行ったとしているが、「ベッセルの公式」については言及していない。*GGA,* 83 (1819 May 24) : 826 ; *Werke*, 6 : 420 参照。

185) この場合の軌道要素においては、軌道長半径は約 2.213AU となり、周期は約 3.29 年となる。

第 3 章　ガウスの関与についての検討

186) この時点では、エンケもガウスも 1805 年彗星(＝1818 年彗星)がそれ以前にも観測されたことがあったのかについては触れていなかった。エンケの計算結果を知ったオルバースはこの彗星が以前にも観測されていた可能性に気付き、1819 年 5 月 18 日付の書簡で、この彗星が 1795 年の彗星と同一の可能性があることをエンケに知らせ、また、同年 5 月 24 日付の書簡で 1786 年の彗星も同様の可能性があることを伝えた。Johann Franz Encke, "Über den Cometen von Pons," *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1829* (1832): 93-133(94-95), 及び

C. Bruhns, *Johann Franz Encke —— Sein Leben und Wirken,* (Leipzig, Ernst Julius Günther, 1869): 61 参照。エンケは直ちにこの指摘に取り組み、1819 年 8 月 15 日付の論文で、これら 4 つの彗星はすべて同一であることを示した。前注 183) 末尾のエンケの論文参照。

187) *CA,* 2 (1819) : 497.

第 4 章　ガウス秘伝の計算法について

188) Johann Franz Encke, "Versuch einer Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahn des Cometen von 1680 mit Rücksicht auf die planetarishcen Störung während der Dauer seiner Sichtbarkeit," *ZA,* 6 (1818 Sep. & Oct.) : 137.

189) *Werke*, 7 : 432. なお、この書簡の全文は、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/2660 (2017 年 11 月 1 日確認)で閲覧できる。

190) *Werke*, 7 : 433. なお、この書簡の全文は、https://gauss.adw-goe.de/handle/gauss/167 (2017 年 11 月 1 日確認)で閲覧できる。なお、この承諾を得て、エンケは 1835 年刊行の論文でガウスの計算方法を公開した。Johann Franz Encke, "Über mechanische Quadratur," *BAJ* für 1837, (1835) : 251-287 参照。また、ガウスの許可を得て公開することになった経緯については、同論文 251 頁の脚注で説明がなされている。

191) 逆に、前注 184)で述べたように、1819 年 5 月 24 日付の *GGA* の記事では、「ガウスの方法」に従って計算されたとあるのみで、「ベッセルの公式」については触れられていない。おそらくこれは執筆者がガウス自身だったためであろう。

第 5 章　1820 年以降の展開

192) Kronk, vol.2 : 58; *BAJ* für 1823, 48 (1820) : 218.

193) *BAJ* für 1826, 51 (1823) : 106-107.

194) *CA*, 12 (1825) : 505.

195) Kronk, vol.2 : 78.

196) *AN,* Bd. 4, Nr. 94 (1826 April) : 469-472.

197) シューマッハは、この彗星に関し、クラウゼン、ガンバール、ビーラから受けた報告について、*Id.* : 466-472 に記載している。

198) *Id.* : 468.

199) 以下の記述については、*AN,* Bd. 5, Nr. 95 (1826 Mai) : 506 参照。

200) この 1824 年の論稿でビーラは或る誤りを犯している。1819 年 11 月にマルセイユのジャン=ジャック・ブランパン(Jean-Jacques Blanpain, 1777-1843)が彗星を発見した。これは周期 5.1 年の周期彗星と計算され、ブランペイン彗星と呼ばれたが、その後の回帰は確認されず見失われた。しかし、21 世紀になって再発見され、289P/Blanpain という番号が与えられた。
https://ssd.jpl.nasa.gov/ sbdb.cgi?sstr=p%2F1819%20w1 参照(2017 年 11 月 1 日確認)。ビーラは、この 1824 年の論稿において、この彗星を 1772 年及び 1805 年の彗星と同一であると考え、その周期を 2535 日(約 6 年 11 か月)と算定して、次回の回帰を 1826 年 10 月末と予言した。実際のビエラ彗星の回帰

は1826年3月19日頃であったから、この1824年当時の予言を正しかったと評価してよいかは多少問題があろう。ビーラは、1826年4月のシューマッハ宛ての書簡では、もはや回帰を1826年10月末と予言したことについて言及していない。

201) 前注 200)で見たように、ビーラが 1824 年に行った予言は幾つかの誤りを含んでいたが、この彗星が1772年と1805年の間に5回周回したと判断したのはビーラが最初であり、その功績は高く評価してよいと思われる。

202) *BAJ* für 1826, (1823): 124-140 (132).

第6章　エンケ彗星のまとめ

203) 本論文の序論で述べたように、概ね1810年以降は、非周期彗星の放物線軌道であれ、周期彗星の楕円軌道であれ、相当に正確な軌道計算を行うことが可能となっていた。そのことは、第2部第10章で述べたポンス・ブルック彗星やオルバース彗星の軌道算定にも表れている。また、エンケ自身について言えば、ポンス・ブルック彗星に関する 1816 年の論文に続いて、1818 年には、1680年に現れた有名な彗星の軌道を最新の方法で正確に算出する論文(前注 188)参照)を発表しており、既にこの頃には彼は天体の軌道計算についてガウスやベッセルらと並ぶ第一級の能力を備えていたと言ってよい。なお、エンケは直角座標を用いて特別摂動を計算する方法を 1851 年に発表し、その方法は今日でも「エンケの方法」と呼ばれる重要な摂動計算方法となっているが、この方法は第 4 章で見たガウスの計算法とは無関係であり、エンケ独自の研究成果である。Johann Franz Encke, "Ueber eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen," *AN,* Bd. 33, Nr. 791, 792 (1852) : 377-398 及び Johann Franz Encke, "Zusatz zu dem Aufsatze : Neue Methode der Berechnung der speciellen Störungen in Nr. 791 und 792 der Astron. Nachrichten," *AN,* Bd. 34, Nr. 814 (1852) : 349-360 参照。今日の軌道計算法における「エンケの方法」については、例えば、長谷川一郎『天体軌道論』[改訂版](恒星社厚生閣、1986年) : 276-280 頁参照。

204) ベッセルが得た1818年第2彗星の観測データ及び暫定的な放物線軌道要素については、例えば、ガウスが、1818年彗星に関する情報と共に、*GGA*で紹介している。*GGA,* 28 (1819) : 276-278 ; *Werke*, 6 : 419 参照。

第4部　総括的考察

第1章　軌道計算の精度の変遷

205) ニュートン、前注 2)、528 頁の表 17 参照。

206) *Id.* : 528 の表 18 参照。

207) これはエンケが 1818 年の論文で示した周期である。後出の本章 7 の記述参照。

208) 第1部第1章 2(12)の記述及び Euler, *supra* note 6) : 156 参照。

209) *Id.* : 147 参照。

210) 第1部第3章3の第2次軌道要素に関する表及び Messier, *supra* note 32) : 640 (637-651)参照。

211) 第2部第3章7の表参照。

212) 例えば、1806 年 6 月に発見された彗星について、ベッセルは放物線軌道を算定した。彼は、その計算値は観測された 8 日間のうち両端においてぴったり合ったが、中央においては黄経が 15 秒大きく、黄経が 43 秒小さかったと述べている。*MC*, 18 (1808 Oct.) : 359. これは 1 分以内の誤差だから良好な結果だと思われる。後に見るように、1810 年 8 月 23 日に発見された彗星についてベッセルが計算した放物線軌道には、平均して赤経で 5 分程度、赤緯で 30 秒程度の誤差があった。*MC,* 24 (1811 Jul.) : 72 参照。また、1817 年 12 月 26 日に発見された非周期彗星に関してエンケが 1818 年春に発表した放物線軌道の誤差は、1817 年 12 月 29 日から 1818 年 4 月 9 日までの 20 個の観測について、赤経につき、10 秒～31 秒のもの 6 個を除いて、9 秒以下であり、赤緯につき、19 秒～86 秒のもの 7 個を除いて、15 秒以下であった。*ZA*, 5 (1818 März & April) : 185-186 参照。その他、1818 年 11 月 28 日に発見された彗星について、ベッセルの指導する学生 2 名が 1821 年に計算した放物線軌道の誤差は、赤経・赤緯とも概ね 1 分以内に収まった。*BAJ* für 1824, (1821) : 144 参照。これらの例に照らすと、オルバースの方法で彗星の放物線軌道を計算した場合、観測自体の精度等にもよるが、大部分の観測値と計算値の誤差を 10～20 秒程度以内に抑えるのは相当に難しかったように思われる。

213) ここでガウスが最初に発表したケレスの軌道予想(*MC*, 4 (1801 Dec.) : 647 に掲載)がどの程度精確だったかを検討しておこう。この予想は、1801 年 11 月 25 日から 12 月 31 日まで 6 日ごとの計 7 日についてケレスの地心黄経と地心黄緯を分単位で示している。そのうち、12 月 7 日夜 12 時（パレルモ時間）については、「黄経 174°07′、黄緯(北緯)10°12′」としている。一方、ツァッハの報告によれば 12 月 7 日夜に「赤経 178°33′30″.6、赤緯(北緯) 11°41′30″」の場所にケレスを認めたという。*MC*, 5 (1802 Feb.) : 182 参照。これを分単位の黄経・黄緯に(四捨五入して)変換すると「黄経 173°56′、黄緯(北緯)10°15′」となる。したがって、12 月 7 日についての位置予測の誤差は「黄経につき+11′、黄緯につき－3′」ということになる。他の 6 日についての誤差もこれと大きくは異ならないとみてよいであろう。例えば、12 月 31 日については「赤経 184°44′、赤緯(北緯)11°5′」という観測の報告があるが(*MC*, 5 (1802 Feb.) : 182)、これを黄経・黄緯に変換してガウスの予想である「黄経 180°10′、黄緯(北緯)12°01′」と比較すると、その誤差は「黄経につき +17′、黄緯につき－24′」となる。これらの範囲の誤差であれば「ガウスの予想はピタリと当たった」と評して差し支えないと思われる。

214) 以下の記述については、*MC*, 5 (1802 März) : 269-273 参照。

215) ただし、この精確さはせいぜい数か月間ほどのものであることに注意しなければならない。小惑星は一般に木星や土星等の影響を受けやすく、数年のうちにその軌道要素は少なからず変化する可能性がある。このような摂動を取り入れた軌道決定論はここでは考慮していない。

216) *GGA*, 32 (1808 Feb. 25) : 314 ; *Werke*, 6 : 298 参照。

217) ベッセルが初めて天文学関係の論稿を著したのは 1804 年である。その論稿は、1607 年に現れたハレー彗星の観測データを検討し種々の補正を施してその楕円軌道をより精密に計算したものであり、オルバースが推薦を付してツァッハに送り、*MC*, 10 (1804 Nov.) : 425-440 に掲載された。この論稿では、ハレー彗星の周期は過去の複数回の観測から求めている。そして、それを前提とした計算の結果、計算と観測との誤差は経度・緯度ともにほとんどが 1 分から 7 分程度となっており、精度は余り高くない。

　また 1805 年に、ベッセルは、1618 年に現れた彗星についてその放物線軌道を精密化する計算を行ったが、その結果得られた放物線軌道によれば、計算と観測との黄経の誤差は 10 分を超えるものが 4 割近く(37 個中 14 個)あり、黄緯の誤差も 10 分を超えるものが 4 分の 1 以上(41 個中 11 個)あった。*BAJ* für 1808 (1805):113-122.参照。したがってこの軌道計算の精度は高いと言えないが、そもそも基となっている観測データが 17 世紀初めのものだからやむをえないと言えよう。

　この頃、ベッセルは、離心率が 1 に極めて近い楕円軌道において任意の時刻に対する真近点角を計算する方法を論じた論文を発表した（*MC*, 12 (1805 Sep.) : 197-207)。このように彼がこの時期に軌道計算の力を着々と蓄えていったことがうかがえる。

218) *MC,* 13 (1806 Jan.) : 88 参照。なお、*Id.* : 91 にはその改良版が掲載されているが、いずれも計算と観測の誤差は記されていない。

219) 実際には両彗星の周期は約 6.6 年だったので、周期 33 年を前提とすれば両者の相違が大きくなったのは当然であろう。なお、ベッセルの計算では、周期 33 年の場合、両彗星の長半径は共に 10.46544 AU となるが、その他の軌道要素については、近日点経度が 51′41″、昇交点黄経が 3°11′56″、軌道傾斜角が 2°41′28″、近日点距離の対数が 0.0531627 だけいずれも 1772 年彗星の方が大きく、離心率は 0.0053330 だけ 1772 年彗星の方が小さかった。*MC,* 14 (1806 Jul.) : 72 参照。ベッセルはかかる差を見て両者は別物であると判定したわけだが、この時点では、この彗星が 33 年の間に複数回周回したという可能性に留意しなかったようである。

220) Friedrich Wilhelm Bessel, “Untersuchung der wahren elliptischen Bewegung der Kometen von 1769,“ *BAJ* für 1810, (1807) : 88-124. これは、*BAJ* 誌の懸賞論文の募集に応じてベッセルが 1806 年 9 月 25 日付で投稿し、受賞した論文である。

221) 第 1 部第 1 章 2(10)参照。そこでは 1769 年彗星の楕円軌道の長半径は 61.45318 AU、周期は 481.7 年と算定されている。

222) *BAJ* für 1809, (1806) : 109-111 の表参照。

223) 各軌道要素の微分量と他の諸量との関係式については、Bessel, *supra* note 220) : 117-119 参照。また、最終的な計算結果における赤経・赤緯の観測との誤差については、*Id.* : 121 の表参照。8 月 21 日から 12 月 1 日までの間の 37 個（赤緯は 35 個）の観測のうち、赤経・赤緯とも誤差が 10 秒以内のものは 1～2 割程度しかないものの、誤差が 60 秒を超えるのは赤経が 7 個、赤緯

が 11 個にとどまるので、かなり良好な精度と言えよう。但し、11 月後半以降、赤経・赤緯とも誤差が増大傾向を示す点にやや問題があるかと思われる。

224) *Id.* : 124 参照。ここでベッセルは観測の誤差として 5 秒以内を仮定しているが、オイラーは 1770 年書においてしばしば観測の誤差として 1 分以内を仮定している。第 1 部第 1 章 2(11)参照。かかる仮定の相違は、その 30〜40 年の間の観測技術の進歩を反映していると言えよう。

225) 以上の記述については、前注 121) 及び前注 123)参照。

226) 前注 146) 参照.

227) 例えば、ポンが 1810 年 8 月 23 日に発見した彗星につき、ベッセルは、8 月 29 日から 9 月 21 日までの間の 10 個の観測に基づき、放物線軌道を算定したが、その誤差は平均すると赤経につき 5 分程度、赤緯につき 30 秒程度となり、余り良い精度とは言えない。*MC,* 24 (1811 Jul.) : 72 参照。また、同じくポンが 1818 年 11 月 28 日に発見した彗星について、ベッセルは、1818 年 12 月 22 日から 1819 年 1 月 2 日までの間の 8 日間の観測に基づき、放物線軌道を算定しその軌道要素を 1819 年 1 月 14 日付書簡でガウスに知らせた。ガウスは直ちにその彗星を確認したが、その位置はベッセルの軌道要素による計算値より赤経で 40 分、赤緯で 10 分も小さかったという。*Werke,* 6 : 419 参照。この軌道要素は短期間の観測に基づく暫定的なものと思われるが、それにしてもこの誤差は相当に大きい。なお、この彗星については、1821 年になってベッセルが自分の指導する学生である Rosenberg と Schercke の計算結果として得られた軌道要素を報告している。この計算は 1818 年 11 月 29 日から 1819 年 1 月 30 日までの間の 11 個の観測に基づくものであるが、観測との誤差は赤経・赤緯ともに概ね 1 分以内に収まっている。*BAJ* für 1824, 49 (1821) : 144 参照。

228) 第 2 部第 9 章 2 の 2 番目及び 3 番目の表参照

229) 第 2 部第 9 章 3 で述べたように、木星等の影響による摂動を考慮するとこの彗星の周期は 120 年程度短くなって、755 年になるとの試算がある。前注 141)参照。結局のところ、摂動がないと仮定した場合に、ニコライの算出した 875.4 年という周期がどの程度精確だったかは検証不能と言わざるを得ない。

230) もっとも、前注 144)で述べたように、エンケは「誤差の可能範囲」を考え、この誤差をさらに 1〜3 倍した値を重視している点に注意を要する。Encke, *supra* note 143) : 391, 394 参照。

231) Encke, *supra note* 188) : 27-120, 129-208.

232) *Id.* : 157 参照。

233) *Id.* : 158 の表参照。

234) *ZA*, 5 (1818 März & April) : 253-255.

235) この 1817 年彗星の放物線軌道はガウスも計算している。*Id.* : 276-277 参照。ガウスは最小二乗法を使ったかには触れず、また観測値との誤差も記し

ていないが、1818年4月6日から5月12日までの4日ごとに赤経・赤緯と光度の予想を示している。*Id.* : 277.

236) 例えば、パラスの摂動に関する研究の遺稿として、*Werke*, 7 : 439-564参照。

第2章　軌道計算における最小二乗法の使用について

237) この問題については、例えば、安藤洋美『最小二乗法の歴史』(現代数学社、1995年)、97-109頁参照。

238) *Werke*, 6 : 165.

239) その代わり、ガウスは、当該天体の数週間後ないし数か月後の位置を予測計算して速やかにその結果を公表することが多かった。その方が天文観測に役立つのであるから、実用上、より有益だったとも言える。

240) ガウスはオルバース宛の1812年1月24日の書簡で「1802年の秋にケレスの第8番目の軌道要素を最小二乗法を使って求めた」という趣旨のことを述べている。*Werke*, 8 : 149参照。ガウスが求めたケレスの第8番目の軌道要素は*MC*, 6 (1802 Nov.) : 497 ; *Werke*, 8 : 228に紹介されている。そこに示された関連の諸数式を見る限り、軌道要素の微分変化を用いた計算とは思われない。したがって、そこで最小二乗法が用いられたとしても、1811年論文のような軌道要素計算ではなく、別のタイプの計算ではないかと推測される。この第8番目の軌道要素は第7番目とわずかしか違わないが、半年後の位置予測では両者の軌道要素の間で黄経に約10分、黄緯に約3分半の差が生ずるという。*MC*, 6 (1802 Nov.) : 497 ; *Werke*, 8 : 228参照。結局、このケレスの第8番目の軌道要素の算定は、「微分変化を用いた最小二乗法の使用」の例ではないものの、「何らかの最小二乗法の使用」の例には該当すると考えるのが妥当ではないかと思われる。なお、A.Galle, “Über die geodätischen Arbeiten von Gauss,” *Werke*, 11-2, Abhandlung 1 (Berlin: Julius Springer, 1929) : 9の脚注4) において、Galleは「ガウスは1802年2月頃に第7番目の軌道要素の算定について最小二乗法を用いたように思われる。」と述べ、また1802年秋頃に算定した第8番目の軌道要素については最小二乗法を用いたことが確実であるとしている。その最小二乗法の使用とは、誤差の二乗和を取って当該軌道要素の精確さを評価するというやり方を指しているのではないかと推測されるが、確かなことは不詳である。

なお、Galleは、ガウスが1802年以前に最小二乗法を用いた例として、ガウスが1799年8月24日付でツァッハに送った書簡を挙げている。その書簡は、地球の経線の長さの計算に関して、当時ツァッハが編集・発行していた雑誌Allgemeine Geographische Ephemeriden の記事中の数字の誤りを指摘するとともに、ガウスが算出した地球の扁平率を示していた。*Werke*, 8 : 136参照。ガウスは、4つの測量の値だけから地球の楕円の形を決定するために「私の方法(meine Methode)」を適用した際にその誤りを発見したと説明し、「私の方法」の証明をツァッハに与えたと述べている。*Id.* : 136参照。ツァッハはこの「証明」については脚注で「これについては別の機会に」とのみ記している。*Id.* : 136. 結局、その証明は同誌に掲載されなかったので、その

内容は不明であるが、Galle は、地球の扁平率の計算の際にガウスが最小二乗法を使ったと説明している。*Werke*, 11-2, Abhandlung 1：9 参照。

241）ガウスは 1812 年 1 月 30 日付のラプラス宛の書簡において、自分は最小二乗法を 1795 年から使っていたこと、また、最小二乗法を頻繁に使うようになったのは 1802 年からだが、それ以降、新たな諸惑星に関する天文計算においていわば毎日のように使用していたと述べている。*Werke*, 10：373 参照。また、ガウスは、前注 240)で述べた 1812 年 1 月 24 日付のオルバース宛の書簡において、1803 年に自分がオルバースに最小二乗法のアイデアを語ったことを公にしてほしいと書いている。*Werke*, 8：149 参照。それに応えて、オルバースは、自身が執筆した変光星に関する 1816 年の論文の脚注で、「既に 1803 年 6 月にガウス教授から最小二乗法についての教示を受けた」旨を記した。D. W. Olbers, "Über den veränderlichen Stern im Halse des Schwans," *ZA*, (1816-2)：192 参照。

242) Bessel (1810)：65-76.

243）その根拠としては、最終的な軌道要素の精度が相当に良いこと、「可能な誤差の範囲」を示しているがその計算は最小二乗法と密接な関連があること等が挙げられる。*ZA,* 1 (1816 März & April)：348-350 参照。

244）オルバース彗星の軌道計算に関する最小二乗法の使用及びその結果については、前注 148)参照。

245）*CA*, 3 (1819)：29；Kronk, vol. 2：47 参照。

246）*BAJ* für 1824, 49 (1821)：220 参照。

247）上記 4 で述べたように、エンケは、ポンス・ブルックス彗星、1817 年 12 月 26 日発見の非周期彗星、1805 年彗星と 1818 年彗星（エンケ彗星）、ポンス・ヴィネッケ彗星、ブランペイン彗星の軌道計算に当たっていずれも最小二乗法を使用している。これに対し、この時期に現れた彗星の軌道計算について彼が最小二乗法を使用しなかった例はほとんど見出すことができない。

第 3 章　最終総括

248）この 2 個の彗星を巡る当時の軌道計算の状況については第 2 部第 4 章・第 5 章参照。ベッセルは、1805 年第 1 彗星（エンケ彗星）について放物線軌道に疑念を感じたものの、楕円軌道の算定には至らず、また、1805 年第 2 彗星（ビエラ彗星）については周期が 33 年の数分の 1 である可能性に気付かなかった。ガウスは、1805 年第 2 彗星が超短周期彗星であることは正しく認識したが、33 年の間に 5 回周回したのを 7 回と誤って算定した。これらの事実は、彗星の楕円軌道の計算、特に周期の算定が 1805 年当時の軌道計算技術ではまだ困難だったことを示している。

249）エンケが 1805 年第 1 彗星と 1818 年彗星の同一性立証に成功したときの、ゲルリング、ニコライ、リンデナウらによる祝福と称賛の様子については、Bruhns, *supra* note 186)：62-63 参照。

【文献略称・引用文献】

Ⅰ　文献の略称

●全集

Werke（又は『全集』）	ガウス全集：Carl Friedrich Gauss, *Werke* 1-12, (Göttingen: Druck der Dieterichschen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner), 1870-1929)

●雑誌

AN	*Astronomische Nachrichten*
BAJ	*Berliner Astronomisches Jahrbuch*
CA	*Correspondance Astronomique, Geographique, Hydrographique et Statistique du Baron de Zach*
GGA	*Göttingische gelehrte Anzeigen*
MC（又は『月報』）	*Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels- Kunde*
ZA	*Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften*

●著書

『天体運動論』	Carl Friedrich Gauss, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, (Hamburg: Friedrich Perthes und I.H. Besser, 1809).
Bessel (1810)	Friedrich Wilhelm Bessel, *Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Kometen,* (Königsberg: Friedrich Nicolovius, 1810).
Kronk, vol.2	Gary W. Kronk, *Cometography：A Catalog of Comets*, vol. 2：1800-1899, (Cambridge: Cambridge University Press, 2003).
Olbers (1797)	Heinrich Wilhelm Olbers, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen*, (Weimar: Industrie-Comptoirs, 1797).

Ⅱ 引用した文献

●著書

[和書]

安藤洋美『最小二乗法の歴史』（現代数学社、1995）

ガウス(飛田武幸・石川耕春訳)『誤差論』(紀伊國屋書店、1981)

桜井邦朋・清水幹夫［編］『彗星　―その本性と起源　―　』（普及版）（朝倉書店、2010）

鈴木文二・秋澤宏樹・菅原賢『彗星の科学　知る・撮る・探る』（恒星社厚生閣、2013）
ダニングトン（銀林浩・小島穀男・田中勇訳）『ガウスの生涯』（東京図書、1976）
中村士『宇宙観の歴史と科学』（放送大学教育振興会、2003）
ニュートン(河辺六男訳)『自然哲学の数学的諸原理』(世界の名著 31「ニュートン」所収)(中央公論社、1979)
長谷川一郎『天体軌道論』[改訂版](恒星社厚生閣、1986)
Felix Klein, (彌永昌吉監修、足立恒雄・浪川幸彦監訳、石井省吾・渡辺弘訳)『クライン：19 世紀の数学』(共立出版、1995)
三浦伸夫『数学の歴史』(放送大学教育振興会、2013)
[洋書]
Bessel, Friedrich Wilhelm, *Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen grossen Kometen,* (Königsberg: Friedrich Nicolovius, 1810).
Bruhns, C., *Johann Franz Encke —— Sein Leben und Wirken,* (Leipzig, Ernst Julius Günther, 1869).
Dunnington, Guy Waldo, *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, (New York: Hafner Publishing, 1955)(Reprinted by The Mathematical Association of America, 2004).
Erman, Adolph, *Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel*, 1, (Leipzig: Avenarius & Mendelssohn, 1852).
Euler, Leonhard, *Theoria motuum planetarum et cometarum*, (Berlin: Ambrose Haude, 1744).
Euler, Leonhard, *Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la Comète de l'an 1769 et son tems periodique*, (St. Petersbuourg: De l'Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences, 1770).
Gauss, Carl Friedrich, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, (Hamburg: Friedrich Perthes und I.H. Besser, 1809).
Hind, J. Russell, *The comets: a descriptive treatise upon those bodies,* (London: John W. Parker and Son, 1852).
Klein, Felix, *Vorlesungen über die Entwickelung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil 1 (Berlin: Verlag von Julius Springer, 1926).
Kronk, Gary W., *Cometography : A Catalog of Comets*, vol. 1 : Ancient-1799, (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).
Kronk, Gary W., *Cometography : A Catalog of Comets*, vol. 2 : 1800-1899, (Cambridge: Cambridge University Press, 2003).
Legendre, Adrien-Marie, *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes,* (Paris: Firmin Didot, 1805).
Lexell, Anders Johan, *Réflexions sur le temps périodique des comètes en général, et principalement sur celui de la comète observée en 1770*, (St. Petersbourg: de l'Imprimerie de l'Académie imperiale des sciences, 1778).

Olbers, Heinrich Wilhelm, *Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen aus einigen Beobachtungen zu berechnen*, (Weimar: Industrie-Comptoirs, 1797).
Pingré, Alexandre Gui, *Cométographie ou Traité historique et théorique des comètes,* Tome Second, (Paris: De l'Imprimerie Royale, 1784).
Schilling, C., *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss,* (*Wilhelm Olbers : sein Leben und seine Werke,* Band 2), (Berlin: Verlag von Julius Springer, 1900 & 1909).

●論文

Abdulle, Assyr and Wanner, Gerhard, "200 years of least squares method," *Elemente der Mathematik*, 57 (2002): 45-60.
Bessel, Friedrich Wilhelm, "Untersuchung der wahren elliptischen Bewegung der Kometen von 1769," *BAJ* für 1810, (1807) : 88-124.
Encke, Johann Franz, "Ueber die wahre Bahn des Cometen von 1812," *ZA* 2 (1816 Nov.-Dec.): 377-403.
Encke, Johann Franz, "Versuch einer Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahn des Cometen von 1680 mit Rücksicht auf die planetarishcen Störung während der Dauer seiner sichtbarkeit," *ZA* 6 (1818): 27-120, 129-208.
Encke, Johann Franz, "Ueber einen merkwürdigen Kometen, der wahrscheinlich bei dreijähriger Umlaufzeit schon zum viertenmale bei seiner Rückkehr zur Sonne beobachtet ist," *BAJ* für 1822 (1819) : 180-202.
Encke, Johann Franz, "Über den Cometen von Pons," *Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre 1829* (1832): 93-133.
Encke, Johann Franz, "Über mechanische Quadratur," *BAJ* für 1837 (1835): 251-287.
Encke, Johann Franz, "Ueber eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen," *AN*, Bd. 33, Nr. 791, 792 (1852): 377-398.
Encke, Johann Franz, "Zusatz zu dem Aufsatze : Neue Methode der Berechnung der speciellen Störungen in Nr. 791 und 792 der Astron. Nachrichten", *AN*, Bd. 34, Nr. 814 (1852): 349-360.
Forbes, Eric G., "The astronomical work of Carl Friedrich Gauss (1777-1855)," *Historia Mathematica* 5 (1978): 167-181.
Galle, A., "Über die geodätischen Arbeiten von Gauss," *Werke*, 11-2, Abhandlung 1 (Berlin: Julius Springer, 1929): 1-165.
Gauss, Carl Friedrich, "Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden," *MC*, 20 (1809 Sep.): 197-224; *Werke*, 6: 148-165.
Gauss, Carl Friedrich, "Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809,"

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores, Vol I. (Gottingae 1811), Classis Mathematicae 3-26 : *Werke*, 6: 1-24.

Halley, Edmond, "Astronomiae Cometicae Synopsis," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 24 (1704-1705): 1882-1899.

Lalande, Joseph-Jérôme Lefrançais de, "Lettre sur le retour de la Comète de 1770, adressée à Messieurs les Auteurs du Journal des Sçavans," *Le Journal des Sçavans*, Janvier 1778 (1778): 34-36.

Lexell, Anders Johan, " Solutio Problematis Astronomici, de Inveniendo Loco Heliocentrico Cometae ex Dato Loco eius Geocentrico, si pro Cognitis Habeantur Locus Nodi et Inclinatio Orbitae, in qua Cometa Movetur," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1777, Pars Prior, (1778): 317-331.

Lexell, Anders Johan, "Tentamen Astronomicum de Temporibus Periodicis Cometarum et Speciatim de Tempore Revolutionis Cometae, A. 1770 Observati," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1777, Pars Prior, (1778): 332-369.

Lexell, Anders Johan, "Coniectura de Locis Coeli, in quibus Cometa Anni 1770, in Proximo suo ad Perihelium Reditu, e Teliure nostra Conspici debet," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1777, Pars Posterior, (1780): 328-342.

Lexell, Anders Johan, "Ulteriores Disquisitiones de Tempore Periodico Cometae, Anno 1770 Observati," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1778, Pars Prior, (1780): 317-352.

Lexell, Anders Johan, " Réflexions sur le temps périodique des comètes en général et principalement sur celui de la comète observée en 1770," *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,* pro Anno 1778, Pars Posterior, (1781): 12-34.

Messier, Charles, "Mémoire contenant les observations de la XI.e comète observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine, et du Collége de Louis-le-Grand; depuis le 14 juin, jusq'au 3 Octobre matin 1770," *Histoire de l'Aacadémie Royale des Sciences pour 1776* (1779): 597-651.

Nicolai, Friedrich Bernhard Gottfried, "Über die Bestimmung der wahren Bahn des zweyten Cometen von 1811," *MC,* 27 (1813 März): 201-221.

Olbers, D. W., “Über den veränderlichen Stern im Halse des Schwans,“ *ZA*, (1816-2): 181-198.