論 文 内 容 の 要 旨

放送大学大学院文化科学研究科
文化科学専攻自然科学プログラム
２０１８年度入学
(学 生 番 号)　181‐700014－7
(氏名)　木村　直文

１．論文題目＊英文の場合は（　）を付して和訳を併記すること。

Study on the solutions of Fermat type functional equation
(　フェルマー型函数方程式の解に関する研究　)

２．論文要旨

人類は，数と共に生活してきたと言える。物事を数の概念に置き換えて数えるという行為は，自然数につながったと考えられており，数の概念は時代とともに拡大し，現在に至る。これに伴い，当然の様に問題で対象とする数の概念を拡大することも行われてきた。本論文で研究対象としているフェルマー型函数方程式の問題は，そのような性質を含んだ問題の１つと捉えられる。

数の概念の拡張という視点で問題を見ていくと，フェルマー型函数方程式という名の示す様に，問題の起点としては，フランスの有名なピエール・ド・フェルマーのフェルマーの最終定理になる。文献［7］に見られる様に，彼が，1630年代に古代ギリシアの数学者ディオファントスの著作『算術』の余白に書き込みした“方程式 $x^n+y^n=z^n$ 但し，$xyz\neq 0$ 及び $n>2$ を満たす自然数の組 (x,y,z) は存在しない。驚くべき証明を得たが余白に書き切れない。”といった内容が，その後フェルマーの最終定理として知られている。フェルマーの最終定理は，その問題の把握のし易さから，数学者や数学愛好家にまで広く長い間取り組まれてきたが，解くことのできない未解決問題とされてきた。しかし，1995年にイギリスのアンドリュー・ワイルズによって完全に証明された。フェルマーが亡くなってから，330年もの時が経過していた。

フェルマーの問題の系譜としてあげられるのが，1770年にイギリスのエドワード・ウェアリングの提唱した『正の整数 k が与えられたとき，方程式 $n=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_s^k$ は全ての整数 n にあてはまるか。ここで，s は k に依存するが n には依存しない。仮にあてはまるなら，与えられた k に対して s の最小値はいくつになるか』といったウェアリングの問題［7］である。この問題は

1909 年ドイツのダフィット・ヒルベルトによって肯定的に証明された。また，多項式に関するウェアリングの問題も，古典的なウェアリングの問題の類似物として扱われていた。1966 年のグロスの論文［1］では，多項式のウェアリングの問題に対して，有理型函数への解の拡張を見ることができる。

1985 年と 2014 年に，イギリスのヘイマンはこれまでの問題の形式を整理した論文［4］,［5］を発表した。それらの中で，フェルマー型函数方程式の問題が挙げられている。

本論文の研究対象であるフェルマー型函数方程式は，文献［4］,［5］に記載されているように

$f_1^n + f_2^n + \cdots + f_k^n = 1$　(1)　但し n,k は $n \geq k \geq 2$ なる正の整数

という形をしており, 解の候補として有理型函数解を考えている。また‘有理型’は，ここでは複素平面全体で有理型であることを意味している。先に挙げた文献［4］,［5］に基づき，先行研究を振り返っておくと，(M)もし（1）が超越的有理型函数解を持つとすると，$n \leq k^2 - 1$, (R)もし（1）が有理函数解を持つとすると, $n \leq k^2 - 2$, (E)もし (1) が超越整函数解を持つとすると， $n \leq k^2 - k$, (P) もし（1）が，多項式解を持つとすると，$n \leq k^2 - k - 1$, であることが知られている。これらの解を扱うときには，$f_1^n, f_2^n, \cdots, f_k^n$ が 1 次独立という条件をつけて，k について低い函数方程式に帰着されない仮定を置いておく。先行研究では, 有理型函数論, 特に Cartan の定理を利用して, (M)から(P)を証明している。

本論文 Chapter 3 では，$k = 3$ の場合，つまり

$$f^n + g^n + h^n = 1 \qquad (2)$$

の場合について論じている。前に述べたことから，$n \geq 9$ では，超越的有理型函数解が存在しないことがわかる。同様に，$n \geq 8$, $n \geq 7$, $n \geq 6$ では，それぞれ有理函数解，超越整函数解，多項式解は存在しない。一方で，$n \leq 6$ では，超越的有理型函数解の例が構成されている。同様に $n \leq 5$, $n \leq 5$, $n \leq 3$ では，それぞれ有理函数解，超越整函数解，多項式解の例が示されている。文献［2］にまとめられているように，$n = 8, 7$ では，超越的有理型函数解の存在が解っていない。同様に，$n = 7, 6$, $n = 6$, $n = 5, 4$ の場合が，それぞれ有理函数解，超越整函数解，多項式解の存在について未解決問題となっている。ちなみに，$k = 2$ の場合，すなわち $f^n + g^n = 1$ については，完全に解かれている。未解決問題に対し，石崎は，文献［6］において $n = 8$ の場合に，仮に(2)が超越的有理型函数解 f, g, h を持てば，これらの解は微分方程式

$$W(f^8, g^8, h^8) = a(z) f^6 g^6 h^6 \qquad (3)$$

を満たすことを示した。ここで W は，ロンスキー行列式で，a は，f, g, h に対して $small$ な有理型函数である。また $n = 6$ の場合に，(2) の超越整函数解 f, g, h は微分方程式

$$W(f^6, g^6, h^6) = b(z) f^4 g^4 h^4 \qquad (4)$$

を満たすことも示した。ここで b は，f, g, h に対して $small$ な有理型函数で

ある。

前記(2)の解の存在範囲について，文献［3］ではCartanの定理を利用して証明していたが，本論文では，Cartan定理に依存しない別証明を，有理函数については Corollary 3.1 で，超越的有理型函数については Corollary 3.2で与えている。

別証明の依りどころとなる不等式を示しておく。まず本論文 Theorem 3.2 の有理函数に対するものであるが，仮定として (2)において $n \geq 7$ とし，有理函数解 f, g, h が存在するとしている。このとき

$$(n-6)\big(\mathfrak{m}(f)+\mathfrak{m}(g)+\mathfrak{m}(h)\big) \leq 3\left(\mathfrak{n}(V)-\mathfrak{n}\left(\frac{1}{V}\right)\right)$$

が成り立つ。ここで，有理型函数のNevanlinna理論における近接函数，個数函数に相当する有理函数に関する $\mathfrak{m}(\cdot),\mathfrak{n}(\cdot)$ については Chapter 2 で独自に定義している。つまり，$\mathfrak{n}(\cdot)$ は有理函数の多重度まで数えた極数，$\mathfrak{m}(\cdot)$ については有理函数 $R=R_N/R_D$ 但し, R_N, R_D は互いに素な多項式としたとき $\mathfrak{m}(R)=\max(degR_N-degR_D, 0)$ としている。また V は

$$W(f^n, g^n, h^n)=n^2 f^{n-2} g^{n-2} h^{n-2}\,V \qquad (5)$$

で定義される有理函数としている。

次に本論文 Theorem 3.3 の有理型函数に対するものであるが，仮定として(2)において $n \geq 7$ とし，超越的有理型函数解 f, g, h が存在するとしている。このとき

$$(n-6)\big(m(r,f)+m(r,g)+m(r,h)\big) \leq 3\left(N(r,V)-N\left(r,\tfrac{1}{V}\right)\right)+S^*(r)$$

が成り立つ。ここで $m(r,\cdot), N(r,\cdot)$ は，それぞれNevanlinnaの近接函数，個数函数で，$S^*(r)$ は誤差項である(例えば文献［8］)。Vの定義式は，(5)と同じだが，有理型函数である。

また Lemma 3.3，Lemma 3.4 をそれぞれ Corollary 3.2, Corollary 3.4 の証明で利用して，(5)に示す V が極を持たない $small$ な函数であることを示し，さらに微分方程式(3), (4)に現れる a, b が極を持たないことを示している。

一般に，(2) が解 f, g, h を持つとすると，任意の整函数(多項式も含む) φ に対して，$f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi)$ もまた解になる。そのため有理型函数解の位数や，有理函数解の次数に上限はない。非定数の多項式解の存在を仮定し，次数の下限について本論文 Proposition 3.1 で述べている。すなわち，n を $2 \leq n \leq 5$ なる整数として， (2)を満たす非定数の多項式解 f, g, h が存在するとして，一般性を失うこと無く, $d=\deg f=\deg g \geq \deg h = k \geq 1$ と仮定する。多項式の場合 $n=5, 4$ が未解決問題で，以下のようなことが解った。

- $d=k$ のとき，$d \geq 4\ (n=5)$, $d \geq 2\ (n=4)$
- $d \geq k$ のとき，$d \geq 5, k \geq 4\ (n=5)$, $d \geq 3, k \geq 2\ (n=4)$

なお，この式は Chapter 4 の Proposition 4.1 で改善している。

本論文 Chapter 4 では，一般的な式の形式である(1)を問題としている。ここでは，$n=k(k-1)$，$k\geq 3$ の場合に，(1)が超越整函数 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ を持てば，これらの解は微分方程式

$$W\left(f_1^{k(k-1)},f_2^{k(k-1)},\cdots,f_k^{k(k-1)}\right)=b\prod_{j=1}^{k}f_j^{(k-1)^2} \qquad (6)$$

を満たすことを示している。ここで b は，$f_1,f_2,\cdots,f_k$ に対して $small$ な整函数である。また，超越整函数には，$n\geq k(k-1)+1$ で，解がないことを示している。このことは，本論文 Corollary 4.1 に記載し，Corollary 3.4 を一般化したものとなっている。また，Corollary 4.2 で，多項式解の場合に(1)が $n\geq k(k-1)$ では解がないことを，Cartan の定理に依存しない別証明で示している。別証明のよりどころとなる不等式を示しておく。まず本論文 Theorem 4.1 の有理函数に対するものであるが，仮定として (1)において $n\geq k(k-1)+1$ とし，有理函数解 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ が存在するとしている。このとき

$$\left(n-k(k-1)\right)\sum_{j=1}^{k}\mathfrak{m}\left(f_j\right)\leq k\left(\mathfrak{n}(V)-\mathfrak{n}\left(\frac{1}{V}\right)\right)$$

が成り立つ。ここで，$\mathfrak{m}(\cdot),\mathfrak{n}(\cdot)$ は前述のように Chapter 2 で定義している。また V は

$$V=\frac{W}{\prod_{j=1}^{k}f_j^{n-k+1}}\,,\qquad W=W(f_1^n,f_2^n,\cdots,f_k^n)\quad (7)$$

で示される有理函数である。次に本論文 Theorem 4.2 の有理型函数に対するものであるが，仮定として(1)において $n\geq k(k-1)+1$ とし，超越的有理型函数解 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ が存在するとしている。このとき

$$\left(n-k(k-1)\right)\sum_{j=1}^{k}m\left(r,f_j\right)\leq k\left(N(r,V)-N\left(r,\frac{1}{V}\right)\right)+S^*(r)$$

が，成り立つ。Vの定義式は，(7)と同じであるが，有理型函数となる。

非定数の多項式解の存在を仮定し，次数の下限について本論文 Proposition 4.1 で Proposition 3.1 の結果を改善した結果を示している。すなわち，n を $2\leq n\leq 5$ なる正の整数として，(2)を満たす非定数の多項式解 f,g,h が存在するとして，一般性を失うこと無く，$d=\deg f=\deg g\geq \deg h=k$ と仮定しておく。多項式の場合 $n=5,4$ が未解決問題と先に述べたが

- $d=k$ のとき，$d\geq 4\ (n=5)$，$d\geq 2\ (n=4)$
- $d\geq k$ のとき，$d\geq 5,k\geq 4\ (n=5)$，$d\geq 4,k\geq 3\ (n=4)$

となる。既知の $n=3,n=2$ の例には $d=k+1$ のものがある。

本論文では，続いて多項式解の Example として $\deg f=\deg g=\deg h=3$ の場合の例を載せている。このパターンの例は，調べた範囲では見たことがな

く新しいものと考えている。記載したように，意識したパターンを変えないように前提条件を置いて解いている。数式処理ソフト $Mathematica$ を使用した。検算も同じソフトを用いたが，そもそもの解が整理した形で出てきていないため，解を 3 乗して足しても 1 にならずに解なのかどうか確信が持てずにいた。本論文に乗せた様に，解を整理し，互いに独立な解であること，解を 3 乗して足すと 1 なることを検証している。

参考文献

[1] Gross, F.: On the Functional equation $f^n + g^n = h^n$, Am. Math. Mon. **73**, 1093–1096 (1966)

[2] Gundersen, G.G.: Research questions on meromorphic functions and complex differential equations. Comput. Methods Funct. Theory **17**(2), 195–209 (2017)

[3] Gundersen, G.G., Hayman, W.K.: The strength of Cartan's version of Nevanlinna theory. Bull. Lond. Math. Soc. **36**, 433–454 (2004)

[4] Hayman, W.K.: Waring's Problem für analytische Funktionen. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. **1984**, 1–13 (1985)

[5] Hayman, W.K.: Waring's theorem and the super Fermat problem for numbers and functions. Complex Var. Elliptic Eq. **59**(1), 85–90 (2014)

[6] Ishizaki, K.: A note on the functional equation f^n+g^n+h^n=1 and some complex differential equations. Comput. Methods Funct. Theory 2, 67-85 (2002)

[7] Kleiner, I.: Excursions in the History of Mathematics, Birkhäuser, (2012)

[8] Laine, I.: Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin (1993)

Abstract

The School of Graduate Studies,
The Open University of Japan

Naofumi Kimura

Study on the solutions of Fermat type functional equation

Human beings may be said to have lived with numbers. Replacing objects with the concept of numbers and counting is thought to have led to natural numbers, and the concept of numbers has expanded over time. Simultaneously, of course, the concept of numbers in problems has been broadened. The problem of Fermat type functional equations, which is the subject of this dissertation, can be considered as a problem involving such properties. Looking at the problem from the perspective of expanding the concept of numbers, as the name Fermat type functional equations suggest, the starting point of the problem is Fermat's Last Theorem of the famous French Pierre de Fermat. As can be seen in [7], he wrote in the margin of the book *Arithmetica* by the ancient Greek mathematician Diophantus in the 1630s, "Equation $x^n + y^n = z^n$, $xyz \neq 0$, $n > 2$. There is no set of natural numbers (x, y, z) that satisfies this equation. I have discovered a truly marvelous demonstration, which this margin is too narrow to contain." is later known as Fermat's Last Theorem. Fermat's Last Theorem has long been considered by mathematicians and math enthusiasts because of its ease of understanding, but it has been regarded as an unsolvable problem. This was fully proved by Andrew John Wiles of the United Kingdom in 1995. It has been 330 years since Fermat died.

The genealogy of Fermat's Problem is that in 1770, Edward Waring of the United Kingdom proposed Waring's problem [7], "Given a positive integer k, does the equation $n = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k$ hold for every integer n, where s depends on k but not on n? If so, what is the smallest value of s for a given

k?" Waring's problem was positively proved by David Hilbert of Germany in 1909. Waring's problem with polynomial was also treated as similar to classical Waring's problem. In Gross's 1966 paper [1], we can see the extension of the solution to meromorphic functions for the Waring's problem with polynomials.

In 1985 and 2014, Hayman of the United Kingdom published papers [4] and [5] that organized the forms of the problems so far. Among them, the problem of Fermat type functional equation is mentioned. In this dissertation, Fermat type functional equation that we are working on has the form

$$f_1^n + f_2^n + \cdots + f_k^n = 1 \quad n, k \in \mathbb{Z},\ n \geq k \geq 2 \qquad (1)$$

as described in [4] and [5]. We observe meromorphic solutions of the equation. Also, a meromorphic function means a function that is meromorphic in the whole complex plane. From the aforementioned [4] and [5], the results of previous studies can be described, (M) If (1) has transcendental meromorphic function solutions, then $n \leq k^2 - 1$, (R) If (1) has rational function solutions, then $n \leq k^2 - 2$, (E) If (1) has transcendental entire solutions, then $n \leq k^2 - k$, (P) If (1) has polynomial solutions, then $n \leq k^2 - k - 1$. In considering these solutions, we assume that $f_1^n, f_2^n, \cdots, f_k^n$ are linearly independent, and that k is not reduced to a low term functional equation. Previous studies have proved (M) to (P) using the theory of meromorphic function, especially Cartan's theorem.

In Chapter 3 of the dissertation, we discuss the case when $k = 3$, that is,

$$f^n + g^n + h^n = 1. \qquad (2)$$

From the above, we can see that there are no transcendental meromorphic solutions for $n \geq 9$. Similarly, for $n \geq 8$, $n \geq 7$, and $n \geq 6$ there are no rational, transcendental entire, or polynomial solutions, respectively. On the other hand, the case $n \leq 6$ constitutes examples of transcendental meromorphic solutions. Similarly, the case $n \leq 5$, $n \leq 5$ and $n \leq 3$ show examples of rational, transcendental entire, and polynomial solutions, respectively. As summarized in [2], the existence of a transcendental meromorphic solution is not known at $n = 8, 7$. Similarly, the cases of $n = 7, 6$, $n = 6$ and $n = 5, 4$ are unsolved problems regarding the existence of rational, transcendental entire and polynomial solutions, respectively. On the other hand, for $k = 2$, that is, $f^n + g^n = 1$, it is completely solved. For these unsolved problems, Ishizaki proved that if $n = 8$ and (2) has transcendental meromorphic function solutions f, g and h, the solutions satisfy the following differential equation in [6]

$$W(f^8, g^8, h^8) = a(z) f^6 g^6 h^6, \qquad (3)$$

where W is the Wronski determinant, and a is a meromorphic function that is a *small* function with respect to f, g and h. It was also shown that if $n = 6$ and (2) has the transcendental entire solutions f, g and h, the solutions satisfy the following differential equation.

$$W(f^6, g^6, h^6) = b(z) f^4 g^4 h^4 \qquad (4)$$

Note that b is a meromorphic function that is a *small* function with respect to f, g and h. In the paper [3], Cartan's theorem was used to prove the existence range of the solution in (2) above. On the other hand, in the dissertation, alternative proofs that do not depend on the Cartan's theorem of (2) above are given by Corollary 3.1 for solutions of rational functions and Corollary 3.2 for transcendental meromorphic solutions.

Here is the inequality that is the basis of alternative proofs. First, regarding the rational function of Theorem 3.2 in the dissertation, it is assumed that $n \geq 7$ in (2) and rational function solutions f, g and h exist. The following holds

$$(n-6)(\mathfrak{m}(f) + \mathfrak{m}(g) + \mathfrak{m}(h)) \leq 3\left(\mathfrak{n}(V) - \mathfrak{n}\left(\frac{1}{V}\right)\right)$$

where $\mathfrak{m}(\cdot)$ and $\mathfrak{n}(\cdot)$ are defined independently in Chapter 2. They are for rational functions corresponding to proximity function and counting function in the Nevanlinna theory of meromorphic functions, respectively. And $\mathfrak{n}(\cdot)$ is the number of poles counted up to the multiplicity of rational functions, and $\mathfrak{m}(\cdot)$ is $\mathfrak{m}(R) = \max(degR_N - degR_D, 0)$. Note that R is a rational function $R = R_N/R_D$ with relatively prime polynomials R_N and R_D. Also, V is a rational function defined by the following equation.

$$W(f^n, g^n, h^n) = n^2 f^{n-2} g^{n-2} h^{n-2} V \qquad (5)$$

Next, regarding the meromorphic function of Theorem 3.3 in the dissertation, it is assumed that $n \geq 7$ in (2) and transcendental meromorphic functions solutions f, g and h exist. The following holds

$$(n-6)\big(m(r,f) + m(r,g) + m(r,h)\big) \leq 3\left(N(r,V) - N\left(\tfrac{1}{V}\right)\right) + S^*(r),$$

where $m(r,\cdot)$ *and* $N(r,\cdot)$ are Nevanlinna proximity function and Nevanlinna counting function, respectively, and $S^*(r)$ is an error term, see e.g. [7]. The definition formula of V is the same as (5), but it is a meromorphic function.

In addition, Lemma 3.3 and Lemma 3.4 are used in the proofs of Corollary 3.2 and Corollary 3.4, respectively, to show that V in equation (5) is a *small* function without poles. It also shows that a and b appearing in the differential equations (3) and (4) have no poles.

In general, if there exist f, g and h satisfying (2), then not only any entire function (including polynomials) φ, but also $f(\varphi), g(\varphi), h(\varphi)$ will satisfy (2). Therefore, there is no upper limit to the order of meromorphic solutions and the degree of solutions of rational functions. Assuming the existence of non-constant polynomial solutions, the lower limit of the degree is described in Proposition 3.1 of the dissertation. That is, suppose that there exists a non-constant polynomial f, g and h satisfying (2) when n is a natural number such that $2 \leq n \leq 5$. Then, it can be assumed that $d = \deg f = \deg g \geq \deg h = k \geq 1$ without losing generality. In the case of polynomials, $n = 5, 4$ are unsolved problems, and the following is found.

$d \geq 4\ (n = 5),\ d \geq 2\ (n = 4)$ when $d = k$

$d \geq 5, k \geq 4\ (n = 5),\ d \geq 3, k \geq 2\ (n = 4)$ when $d \geq k$

This formula has been improved in Proposition 4.1 of Chapter 4.

In Chapter 4 of the dissertation, we consider the functional equation (1), as a general case. Here, when $n = k(k-1), k \geq 3$, if (1) has transcendental entire functions $f_1, f_2, \cdots, f_k$ it is shown that these solutions satisfy the following differential equation.

$$W\left(f_1^{k(k-1)}, f_2^{k(k-1)}, \cdots, f_k^{k(k-1)}\right) = b \prod_{j=1}^{k} f_j^{(k-1)^2} \qquad (6)$$

Note that b is an entire function that is a *small* function with respect to $f_1, f_2, \cdots, f_k$. It also shows that the transcendental entire function has no solution in $n \geq k(k-1)+1$. This is described in Corollary 4.1 in the dissertation, which is a generalization of Corollary 3.4. Also, in Corollary 4.2, it is shown by the alternative proof that does not depend on the Cartan's theorem that (1) has no solution when $n \geq k(k-1)$ in the case of a polynomial solution. Here is the inequality that will be the basis for the alternative proof. First, for solutions of rational functions of the dissertation Theorem 4.1, assume that $n \geq k(k-1)+1$ in (1), solutions of rational functions $f_1, f_2, \cdots, f_k$ exist. Then, the following inequality holds.

$$\left(n - k(k-1)\right) \sum_{j=1}^{k} \mathfrak{m}\left(f_j\right) \leq k\left(\mathfrak{n}(V) - \mathfrak{n}\left(\frac{1}{V}\right)\right)$$

Note that, $\mathfrak{m}(\cdot)$ and $\mathfrak{n}(\cdot)$ are defined in Chapter 2. Also, V is a rational function given by

$$V = \frac{W}{\prod_{j=1}^{k} f_j^{n-k+1}}, \quad W = W(f_1^n, f_2^n, \cdots, f_k^n). \qquad (7)$$

Next, as shown in meromorphic solutions of Theorem 4.2 in the dissertation, it is assumed that $n \geq k(k-1)+1$ in (1), and that the transcendent meromorphic solutions $f_1, f_2, \cdots, f_k$ exist. At this time, the following inequality holds.

$$\left(n-k(k-1)\right)\sum_{j=1}^{k} m\left(r, f_j\right) \leq k\left(N(r, V)-N\left(\frac{1}{V}\right)\right)+S^*(r)$$

The definition formula of V is the same as (7), but it is a meromorphic function.

Assuming the existence of non-constant polynomial solutions, the dissertation Proposition 4.1 gives an improvement of the result of Proposition 3.1 for the lower limit of the degree. That is, suppose that there exist non-constant polynomials f, g and h that satisfy (2) when n is a natural number such that $2 \leq n \leq 5$. Then, it can be assumed that $d = \deg f = \deg g \geq \deg h = k$ without losing generality. In the case of polynomials, previously $n = 5, 4$ are unsolved problems, and the following is found.

$d \geq 4$ $(n = 5)$, $d \geq 2$ $(n = 4)$ when $d = k$

$d \geq 5, k \geq 4$ $(n = 5)$, $d \geq 4, k \geq 3$ $(n = 4)$ when $d \geq k$

We have examples of the cases $n = 3, 2$ with $d = k + 1$. In the dissertation, solutions for $\deg f = \deg g = \deg h = 3$ are listed as examples of polynomial solutions. We have not seen examples of these patterns in our research and think it's new. As mentioned, we set preconditions and solve it so as not to change the conscious pattern. We used Formula Manipulation System Mathematica to solve this problem. We used the same software for the check, but since the solution did not come out in an organized form in the first place, even if we added the solution to the third power, it did not become 1, and we could not confirm whether it was a solution. As shown in the dissertation, we have arranged the solutions and confirmed that they are linearly independent of each other and that the sum of the solutions to the third power is 1.

References

[1] Gross, F.: On the Functional equation $f^n + g^n = h^n$, Am. Math. Mon. **73**, 1093–1096 (1966)

[2] Gundersen, G.G.: Research questions on meromorphic functions and complex differential equations. Comput. Methods Funct. Theory **17**(2), 195–209 (2017)

[3] Gundersen, G.G., Hayman, W.K.: The strength of Cartan's version of Nevanlinna theory. Bull. Lond. Math. Soc. **36**, 433–454 (2004)

[4] Hayman, W.K.: Waring's Problem für analytische Funktionen. Bayer.

Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. **1984**, 1–13 (1985)

[5] Hayman, W.K.: Waring's theorem and the super Fermat problem for numbers and functions. Complex Var. Elliptic Eq. **59**(1), 85–90 (2014)

[6] Ishizaki, K.: A note on the functional equation f^n+g^n+h^n=1 and some complex differential equations. Comput. Methods Funct. Theory 2, 67-85 (2002)

[7] Kleiner, I.: Excursions in the History of Mathematics, Birkhäuser, (2012)

[8] Laine, I.: Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin (1993)

博士論文審査及び試験の結果の要旨

学位申請者

放送大学大学院文化科学研究科

文化科学専攻自然科学プログラム

氏名　木村　直文

論文題目　＊英文の場合は（　）を付して和文を併記。

Study on the solutions of Fermat type functional equation

（フェルマー型函数方程式の解に関する研究）

審査委員氏名

・主査（放送大学教授　博士（理学））　石崎 克也

・副査（放送大学教授　博士（Ph.D））　隈部 正博

・副査（放送大学准教授　博士（工学））森本 容介

・副査（金沢大学教授　博士（理学））　藤解 和也

論文審査及び試験の結果

本学位論文で木村氏が研究対象としたフェルマー型函数方程式は

$$f_1^n + f_2^n + \cdots + f_k^n = 1 \qquad (1)$$

ここで n, k は $n \geq k \geq 2$ なる正の整数という形である。歴史的には，17世紀に数を対象としたフェルマーに始まり，18世紀のウェアリング，20世紀初頭のヒルベルトらを通して現在に至っている。元来の問題は，フェルマーの最終定理という形で1995年にワイルズによって完全に証明された。フェルマーが亡くなってから，330年もの時が経過している。

函数解を対象としたフェルマー型函数方程式（1)については，解析数論や複素函数論の発展に伴いそれぞれの研究領域で研究対象となっていたが，1985年にHaymanによって問題が整えられ，函数の特質によって4つの対象に分類された。先行研究を振り返っておくと，(M)もし（1）が極を有する超越的有理型函数解を持つとすると，$n \leq k2-1$，(R)もし（1）が極を有する有理函数解を持つとすると，$n \leq k2-2$，(E)もし（1）が超越整函数解を持つとすると，$n \leq k2-k$，(P) もし

（1）が，多項式解を持つとすると，$n \leq k2-k-1$，であることが知られている。先行研究では，有理型函数論，特に Cartanの定理を利用して，(M)から(P)を証明している。

木村氏の研究成果としては，$k=3$ の場合に(M)，(R)，(E)，(P)の場合を別々に扱うのではなく統一した理論体系の元にCartanの定理を用いない方法で証明を与えたことである。この結果は，ドイツに拠点を置く学術雑誌 Comput. Methods Funct. Theory 19 (1)，157–172 (2019)に掲載され，学位論文では第3章に纏められている。k=3 の場合でも未解決部分は残されている。解決に向かう1つの方法として（1）の解の満たす微分方程式を導出する研究がある。木村氏は(E)についてこの議論を一般化することに成功している。複雑なロンスキー行列式の変形と数学的にきめの細かいネバンリンナ函数の評価が必要とされる。この結果は，イギリスに拠点を置く学術雑誌 Proc. Edinburgh Math. Soc. Vol.63，654–665 (2020)65 に掲載され学位論文では第4章に纏められている。非自明な函数解の構成もこの研究分野には欠かせない研究課題である。これまでに $n=k=3$ の場合で次数の等しい多項式の例は見つかっていなかったが，木村氏は正規化をした上で可能な全て形を構成している。この成果は学術論文の第4章およびAppendixに纏められている。

本論文では，予備論文審査で注意のあった記号の曖昧さや定義の不十分さについても解消された。また，審査員のご指摘に従い，論文全体を統一された流れの中に統合する形式に整えるように改善された。

既に，日本数学会，等角写像論値分布論研究集会において学術的な内容は木村氏のよって報告され国内での評価を得ている。また，2021年出版の専門書 I.Laine，et al.，Complex delay-differential equations. De Gruyter Studies in Mathematics 78 に引用されるなど国際的にも評価されている。

博士論文発表会・審査会は1月16日（月）13:30より公開（Zoom利用）で開催され，木村氏によって上記の研究成果が発表され質疑応答が行われた。審査委員会は木村氏によって提出された当該論文について，新しい結果が得れていること，数学的に正しいこと，学術的に興味の対象として相応しいことを承認して木村氏に博士の学位を認めることを満場一致で結論づけた。